物理学の廻廊

西島和彦監修

電磁場・存在の一形態

山本祐靖著

産業図書

序

この本は私がマサチューセッツ大学と東京大学で行った電磁気学の講義のノートと，東京大学で行った現代物理学の講義のノートを基にして書かれたものである．場の概念を強調したかったので，電磁気学の基本的綱目の一つである電磁場の物質中での振舞いについては付録で簡単に触れるだけにした．そしてどちらかというと，この本ではこのレベルの電磁気学の本ではあまり取り上げられていない綱目を中心にした．また，電磁気学の個々の問題を解くこともあまりやっていないが，一つ一つの例題から電磁場の性格ができるだけ明瞭になるように努力した．この本を理解するのに必要な数学はほとんど高校で習ったものばかりだが，例外としては偏微分とベクトル演算がある．しかし，本文の中でそれらの意味を一応説明してあるので，別に数学の本を使って勉強する必要はないと思う．

電磁気学に関しては内外を問わず数多くの本が書かれており，その中にはいわゆる名著もある．そのため，西島和彦教授にこの本を書くようお勧めを受けたとき，かなり躊躇したが，今までとは違ったタイプの本を書くようにというお話だったので，お引き受けした．この本を執筆中，各章ごと細かく読んで下さり，内容のみならず私のつたない日本語にも色々と貴重な助言を下さった西島教授，また同様に全文をチェックして下さった平川浩正教授に深く感謝したい．更に授業中，色々難問，奇問をして私の電磁気学の理解を深めてくれた学生の皆さん，また内容等につき色々と相談にのってくれた，私の研究室の皆さんに感謝したい．

1979 年 9 月

山　本　祐　靖

目　　次

序

第1章　はじめに ……………………………………………… 1

第2章　静　電　場 ……………………………………………… 5

2-1　電　　　荷 ……………………………………………… 5
2-2　Coulomb の法則 ……………………………………………… 6
2-3　電　　　場 ……………………………………………… 8
2-4　電気力線と電束 ……………………………………………… 11
2-5　Gauss の法則 ……………………………………………… 13
2-6　静電エネルギーと電位 ……………………………………………… 16
2-7　コンデンサーと電気エネルギーの密度 ……………………………………………… 20
2-8　Coulomb 力が保存力であることによる電場の振舞い ……………………………………………… 21

第3章　静磁場と定常電流 ……………………………………………… 25

3-1　Lorentz 力 ……………………………………………… 25
3-2　電　　　流 ……………………………………………… 28
3-3　Ampere の法則 ……………………………………………… 30
3-4　磁場とベクトルポテンシャル ……………………………………………… 33
3-5　Biot-Savart の法則 ……………………………………………… 36
3-6　磁気エネルギー ……………………………………………… 39

第4章　電 磁 誘 導 ……………………………………………… 43

4-1 Faraday の法則……43
4-2 インダクタンス……48
4-3 磁気エネルギー……50
4-4 *LC* 回 路……51
4-5 電 気 誘 導……53

第5章 Maxwell の方程式と電磁波……57

5-1 Maxwell の方程式……57
5-2 進行電磁波……60
5-3 電磁波のエネルギー……63
5-4 電磁波の運動量……66
5-5 電磁波の偏光と角運動量……67
5-6 電磁波による信号の伝播とその群速度……71

第6章 Maxwell の方程式と Lorentz 変換—電場と磁場の相対論的振舞い……75

6-1 Lorentz 変換……75
6-2 速度，運動量，エネルギー，力の Lorentz 変換……79
6-3 電場と磁場の相互依存性……82
6-4 電荷密度と電流密度の Lorentz 変換……85
6-5 電磁場の Lorentz 変換……85

第7章 移動する電荷による電磁場—電磁輻射……91

7-1 一定の速度で移動する電荷による電磁場……91
7-2 加速された電荷による電磁場……96
7-3 任意の運動をする電荷による電磁場……103

第8章 電磁場の量子化—光子……107

8-1 光電効果と光子の概念……107
8-2 光子を分割できるか？……109
8-3 光子の性質……110

8-4 Compton 散乱……112
8-5 制動輻射，電子対創生，電子-陽電子消滅……114
8-6 電子による光子の発生と吸収—仮想光子の交換……115
8-7 電磁相互作用と強い相互作用……118
8-8 電磁相互作用と弱い相互作用……119
8-9 電磁相互作用に残された問題……120

付録Ⅰ 物質中での電磁場……121

A1-1 導体と絶縁体……121
A1-2 磁場と物質……127
A1-3 物質中での電磁波……130

付録Ⅱ MKSA 系の単位のまとめ……133

付録Ⅲ ベクトル演算式……135

参考書……137
索　引……139

第 1 章

はじめに

人類始まって以来人間のまわりに起きる自然現象を見て，その原因がなんだろうと思った人々が多かったに違いない．そしてこの好奇心が自然現象の解明の原動力となって，人類の歴史が進むにつれ科学も進展してきた．自然には多種多様の現象があるが，現在ではそれらすべてを左右する根本的な“相互作用”，あるいは“力”が4種類あることが知られている．これは重力相互作用，弱い相互作用，電磁相互作用，強い相互作用である．この中で我々の日常生活に特に関係の深いものは重力相互作用とこの本の対象である電磁相互作用である．

Newton がりんごが木から落ちるのを見て，この現象の原因が万有引力であることを発見したという伝説は有名であるが，Newton によって重力相互作用の解明が始められたことは事実である．また電磁相互作用では今ではその名が示すように，電気と磁気の力が統合されているが，昔，自然現象で落雷を見たとき，それが永久磁石が鉄を引きつける現象と関連しているとはだれも考えなかった．したがって電磁気学は，最初はガラスの棒を絹の布でこするとそれに

紙の小片が吸いつくといったような静電気の現象と，永久磁石等の静磁場の現象と，二つの別個の“力”として研究されてきた．しかし後に電流により磁場ができることが発見され，更に電磁誘導の現象の発見等により，電気と磁気が密接に関連していることがわかった．この二つの一見違った相互作用の統合はMaxwell によって理論化され，有名な Maxwell の方程式が得られた．

また Maxwell の方程式がいわゆる Galilei 変換のもとでは不変でないので，それを不変にする Lorentz 変換が生まれ†，それより物理学は Einstein の相対論へと発展した．その結果相対論的に解釈すると，電場と磁場は相対論的効果により結ばれ，本質的には同じ現象で，観察する座標系により電場と見えたり磁場と見えたりすることがわかった．

このように電磁気学により自然に存在する一見異なった相互作用の統合の第一歩がふみ出された．そしてまた現在4種類に区別されている相互作用も，実は唯一の根本的な相互作用の四つの“顔”ではないかと考えられ，自然の相互作用，あるいは“力”の統一ということが物理学の最大の課題となっている．その一つとして最近電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論が提唱され，実験データ等により，この理論の正当性が確認されてきており，自然の力の統一は大きく前進し始めた．

一見無関係とはいっても，これらの相互作用を統一させるには，その間になにか共通なものがなければならない．この共通なものが“場”といわれる概念で，電場，磁場という言葉でもわかるように，場の概念は電磁気学で生まれ，その後他の分野にも応用されるようになった．場の概念は二つの物体間になんらかの力が二体が直接ふれ合っていなくても，ある距離をおいて働くという事実を説明するために生まれたと考えてよいだろう．りんごが木から落ちたのは地球による引力がある距離を隔ててりんごにかかったからである．しかし前述のように場の概念は電磁気学で生まれた．これは多分永久磁石のまわりに砂鉄をかけると磁力線が“見える”ことなどから，もっと視覚的に場の現実性がわかったせいかもしれない．点電荷があればそのまわりに電場ができ，その電場は距離の2乗に反比例して弱まるが無限に広がる．そして二つの点電荷の間の

† これらの変換については西島和彦著“力学系と自然法則”，藤井保憲著“時空と重力”（ともに産業図書刊：物理学の廻廊）を参照．

力は，一つの点電荷のつくる電場と，もう一つの点電荷との間の相互作用によるものと考え，距離を隔てて働く力を説明することができた．電場はそれをつくる点電荷の存在を知らせ，またその点電荷と他の点電荷との相互作用を媒介すると考えられる．

また有名な Rutherford 散乱のようにアルファ粒子（ヘリウムの原子核）と金のような重い原子核との散乱の場合には，玉突きの場合のように粒子が直接接触して起きるのではなく，二つの原子核の電荷間の力によって，お互いに触れることなく起きる．しかしエネルギーと運動量は衝突前後で保存されなければならないから，入射されたアルファ粒子の電荷のつくる電場によりそのエネルギーと運動量の一部が静止していた原子核に与えられたと考えなければならない．

このような場はエネルギーと運動量をもつので，粒子と同等と考えられそうだが，一つ違うことは，一つの場によって粒子のすべての性質を代表することができないということだ．粒子の電荷によってつくられる電磁場は，その粒子の存在を電磁相互作用的に示すが，仮にこの粒子が電気的に中性な中性子のようなものに近よっても，中性子はその存在に気がつかない．しかし粒子がつくる場は電磁場に限られているわけではない．

量子力学の進展に伴い場の概念は，陽子と中性子を強く引きつけ，小さい原子核を構成する非常に短い距離間でしか効力のない強い相互作用や，原子核のベータ崩壊を起こす弱い相互作用にも応用されるようになった．その一つの成果は Yukawa による中間子の存在の予言である．電磁相互作用が電磁場で媒介されるように，強い相互作用もある種の“場”によって媒介されると考え，Yukawa は場が粒子の存在を意味していることから，現在パイ中間子と呼ばれている粒子の性質を予言した．更に重力も粒子の質量に依存する重力場により媒介されるとも考えられ，自然の相互作用はすべて場によって可能になるともいえ，〈場は存在の一つの形態〉ともいえよう．また四つの相互作用の場の性質に共通点が見いだせるならば，前述の自然の力の統一の達成に大きな手がかりを与えるものである．

第 2 章

静　電　場

2-1 電　　荷

自然には正と負の電荷があることが古くから知られている．しかしどちらを正電荷と呼び，どちらを負電荷と呼ぶかはまったく任意だが，定義としては電荷が発見されたころガラス棒を絹の布でこするとガラスに帯電する電荷を正とし，エボナイト棒をフランネルの布でこするとエボナイトに帯電する電荷を負とした．電荷は独立に存在しないので，電荷を取り出すことはできない．電荷は必ず物質についているので，物質の特性と考えることができる．しかし物質は通常の状態では電気的に中性である．我々人間も普通は電気的には中性であるが，冬，空気が乾燥している日などにプラスティックのくしで髪をとかすとパチパチという音がして髪が立つように，なんらかの方法で帯電することもある．電荷の量の特徴はある単位の整数倍であることで，これは有名な Millikan の油滴の実験で証明された．この単位は電子のもつ電荷の絶対値に等しい．し

かしなぜ電荷がこのようにある基本単位値の整数倍でなくてはならないかはわかっていない．また素粒子物理学では第1章で述べた強い相互作用をする粒子はクオーク（quark）と呼ばれる基本的な粒子から成り立っていて，クオークの電荷は基本単位の $-\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ 倍であると考えられている．しかし現在のところクオークは個別に発見されていないので，微視的にも巨視的にも電荷量は基本単位値の整数倍であると考えてよい．

原子は陽子，中性子，電子で構成されていることはよく知られている．陽子は正の電荷を1基本単位，電子は負の電荷を1基本単位，そして中性子は電荷をもたない．また原子は全体的に見れば電気的に中性なので陽子の数と電子の数が等しくなければならない．電荷は一つの系では常に一定である．つまり隔離された系の電荷は不変であり，これは電荷の重要な性質である．

2-2 Coulomb の法則

電荷は独自に存在しない．したがって電荷を直接観測したり，その量を測ったりすることはできない．電荷の存在を検知し，その量を知るには，その影響によって起きるなにか測定できる現象によらなければならない．同種の電荷間には斥力が働き，異種の電荷間には引力が働くことは古くから知られていたが，Coulomb は 1785 年にこの現象をねじばかりを使って定量的に観測し，

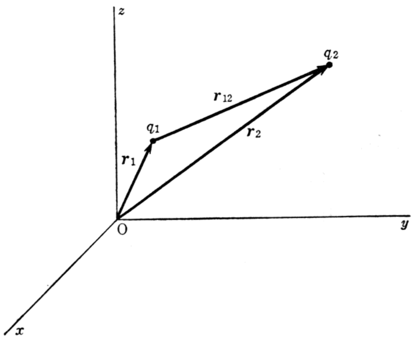


図 2-1 点電荷 q_1, q_2 の位置ベクトル

電荷間の斥力または引力は電荷間の距離の 2 乗に反比例し，電荷量の積に比例することを発見した．この法則は Coulomb の法則と呼ばれ静電気で最も重要な法則である．二つの電荷を点電荷† でおき換えそれぞれを q_1, q_2 とし，その間の距離を r とし，その間に働く力を F とすれば，Coulomb の法則は

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2-1}$$

となる．この力は Coulomb 力とも呼ばれ，その方向は r にそっていて，図 2-1 のように，$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ を q_1, q_2 の位置ベクトルとすれば，式 (2-1) は

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2} = k\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \tag{2-2}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{F}_{1\to 2}$ は q_1 による q_2 に働く力，$\hat{r}_{12} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)/|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ で，$\boldsymbol{r}_{12}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルで，今後 ＾ の記号は単位ベクトルを意味する．また $|\boldsymbol{r}_{12}|^2 = \boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{12}$†† で $\boldsymbol{r}_{12}$ の大きさの 2 乗である．

式 (2-2) の比例定数 k は使われる単位によって異なるが，この本で使う MKS 単位（長さ：メートル (m)，質量：キログラム (kg)，時間：秒 (s)）では，力は newton (N と略す)，電荷は coulomb (C と略す) の単位をもつので $\mathrm{Nm^2/C^2}$ の単位をもつ．Coulomb の定義は後で述べるように電線に 1 ampere の電流が流れるときに電線の断面を 1 秒間に通る電荷量である．そのため電磁気学の単位系はこの場合 MKSA (A は ampere の略) と呼ばれる．

Coulomb 力は電荷間の物質によってその大きさが変わるが，この本ではすべて真空中での電磁気の現象のみを取り扱うことにする．この場合の式 (2-2) の比例定数は $1/4\pi\varepsilon_0$ と定義され，その値は Coulomb 力を正確に測定した結果 $9\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ である．後で述べるように ε_0 は

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad \mathrm{C^2/Nm^2}$$

で，c は真空中での光速 3×10^8 m/s である．この定義を入れて式 (2-2) を書くと，MKSA 系での Coulomb の法則は

† 点電荷とは電荷が空間の一点に集中していると見られる点で，力学の質点に対応する．

†† ベクトルの計算に予備知識のない読者は西島和彦著 "力学系と自然法則" (産業図書)，ならびにこの本の付録 III を参照．

$$\boldsymbol{F}_{1\to2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \tag{2-3}$$

となる．

一例として水素原子の構成粒子である陽子と電子間の力を計算してみよう．陽子，電子の電荷は $\pm1.6\times10^{-19}$ C，水素原子内でのその間の距離は約 5.3×10^{-11} m なので，$F\approx8.2\times10^{-8}$ N となる．これを二つの粒子間の重力と比較すると m(陽子)$=1.67\times10^{-27}$ kg，m(電子)$=9.11\times10^{-31}$ kg なので F(重力)$\approx3.7\times10^{-47}$ N と，重力による引力は無視できるような弱いものであることがわかる．またヘリウム原子核のように2個の陽子と2個の中性子から成り立つ核内での陽子間の斥力は，その間の距離が約 4×10^{-15} m だから $F\approx14.4$ N である．このような斥力が働くにもかかわらずヘリウム原子核がばらばらに分解しないのは，これよりもっと強い引力が強い相互作用によりこのように短い距離間で働いているからである．しかしウラン，プルトニウム等陽子の数の多い重い原子核では Coulomb 力が強い相互作用の力に打ち勝って分裂し，いわゆる核分裂という現象が起こり，そのとき発生するエネルギーは原子炉の原動力として使われている．

2-3　電　　場

式 (2-3) は Coulomb 力はある距離をこえて作用することを意味している．つまり二つの電荷が直接触れ合うことなくお互いに影響を与えているわけで，それどころか $r_{12}=0$ となれば式 (2-3) では Coulomb 力は無限大になってしまう．しかし非常に短い距離の現象は微視的な世界の話で，量子力学的に考えなければならないので，この本では r_{12} がゼロに近い場合についてはふれないで話を進める．

式 (2-3) は電荷 q_1 が電荷 q_2 に与える力を q_1，q_2 間の距離の関数で表わしている．q_1 の値を一定にしておき q_2 を任意に変えれば式 (2-3) は q_1 による任意の電荷 q_2 に与える力となり，更に式 (2-3) を q_2 で割れば

$$\frac{\boldsymbol{F}_{1\to2}}{q_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12}$$

で，これは q_1 がそれから r_{12} の距離にある他の電荷に与える影響の程度を示している．つまりこの影響により他の電荷は q_1 の存在を知ることができる．これはまさしく“場”の概念で，$\boldsymbol{F}/q_2$ は点 2 における電場と呼ばれ，ベクトル $\boldsymbol{E}$ で表わされ，一般に

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^2}\hat{r} \tag{2-4}$$

と書かれる．この電場内で他の電荷 q' が受ける力は $\boldsymbol{F}=q'\boldsymbol{E}$ だから，Coulomb 力は電荷と電場の相互作用である．

電荷が何個もある場合，それらによりある場所につくられる電場は個々の電荷による電場の和である．これは“重ね合せの原理”によるもので，新しい電場を加えてもそれ以前の電場に変化がないことを意味する．

2-3-1　双極子の電場

一例として図 2-2 のように電荷 q と $-q$ が $2a$ の間隔におかれている配位の場合，電荷を結ぶ線の垂直二等分線上の点 P での電場を求めよう．中点 O から P までの長さを r とすれば $\boldsymbol{E}(r)$ は

$$\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}$$

である．ここで $\boldsymbol{E}_{+}$, $\boldsymbol{E}_{-}$ は q と $-q$ による P での電場で，図 2-2 より

$$|\boldsymbol{E}_{+}|=|\boldsymbol{E}_{-}|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

である．$|\boldsymbol{E}|$ はベクトル $\boldsymbol{E}$ の長さで，今後単に E と表わす．また $\boldsymbol{E}_{+}$, $\boldsymbol{E}_{-}$ の OP 方向の成分は互いに消し合うので $\boldsymbol{E}$ は OP に垂直な成分しかもたず，その大きさは $E=2E_{+}\cos\theta$ で与えられ，$\cos\theta$ は図 2-2 より

$$\cos\theta=a/\sqrt{a^2+r^2}$$

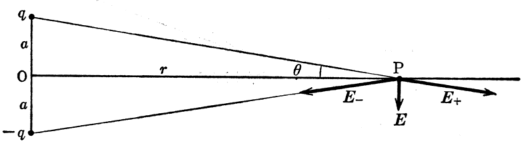


図 2-2　双極子による電場

である．したがって

$$E=\frac{2\,aq}{4\,\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)^{3/2}}$$

で，$2\,a\ll r$ の場合は

$$E\approx\frac{2\,aq}{4\,\pi\varepsilon_0 r^3}$$

となる．この場合，$2\,aq$ は電気双極モーメントと呼ばれ，物理的に有意義な量である．

2-3-2　均一に帯電した無限大の平面の電場

複数の電荷による電荷は個々の電荷の電場の和であるから，電荷の分布，たとえば電荷密度，が知られていれば，電場の和を積分におき換えることができる．その一例として電荷密度 σ C/m^2 で均一に帯電している無限に広がる平面による電場を求めよう．この平面は非常に薄く，厚さがないと考え，σ は両面

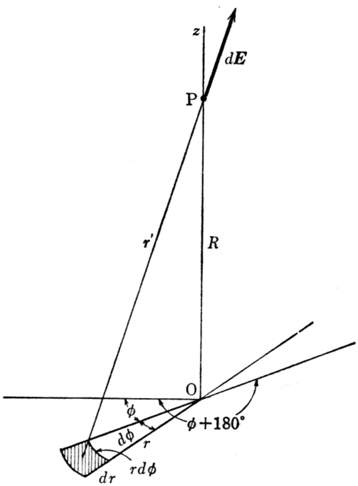


図 2-3　均一に帯電した無限大の平面上の面素 $rdrd\phi$ による電場

に別々にあるのではなく平面全部に対しての電荷密度である†．図 2-3 のように平面上に円柱座標系 r, ϕ, z をとり，z 軸上の点 P での電場を求めよう．平面上に (r,ϕ) で指定される点 Q をとり，そこで面積 $rdrd\phi$ をもつ面素のもつ電荷 $\sigma rdrd\phi$ による点 P での電場を $d\boldsymbol{E}$ とする．この電場と点 $(r,\phi+180°)$ にある面素のもつ電荷による点 P での電場は z 軸に対して対称だから，電場は z 成分しかもたない．これを $\boldsymbol{E}$ とすれば

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}\int dE\cos\theta$$

となる．

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\phi}{r^2+R^2},\qquad \cos\theta=\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

より

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}\frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(r^2+R^2)^{3/2}} \tag{2-5}$$

で，上式を積分すると

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}\frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2-6}$$

となり，$\boldsymbol{E}$ は常に平面に垂直な方向にあり，平面からの距離に依存しないことがわかる．またこれらの系の面対称性から，裏面，つまり $-z$ の方向の電場 $\boldsymbol{E}'$ は，

$$\boldsymbol{E}'=-\hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

であることがわかる．

2-4　電気力線と電束

物理学では物理的概念を図形化して理解しやすくすることがよくある．棒磁石の上に紙をのせ，その上に砂鉄をまくと磁場の分布が見られることは多くの人が経験したことであろう．これを見て後述の磁場の分布を図形化するために磁気力線が考えられた．同様に電場の分布を図形化するために電気力線の考え

† 平面が導体の場合は電荷は表面にのみ存在する（付録 I 参照）．

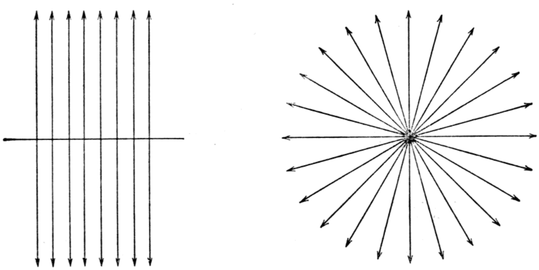
が導入された．これは仮想の線で，その線の接線は接点での電場の方向を示し，単位面積を通り抜ける線の数が電場の強さに比例するようになっている．図 2-4 (a) は前述の均一に帯電した平面の電気力線を示す．図 2-4 (b) は点電荷 $+q$ の電気力線で，点電荷を中心にして同心球を画けば同数の電気力線が通り抜ける球上の表面積は球の半径の 2 乗に比例して大きくなることがわかる．

ある断面をなにかが通り抜ける量を定量化するのに“束”という概念が使われる．手近な例では，ある断面を毎秒流れる水の量がある．水の流れの速度を $\boldsymbol{v}$ m/s とすれば，その流れに直交する断面積 S m^2 を通る水量は vS m^3/s である．流れと断面が直交していない場合，面をその面積に比例する長さをもち，面に垂直なベクトル $\boldsymbol{S}$ で表わせば，水量は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{S}$ との内積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}=vS\cos\theta$ (θ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{S}$ とがなす角) で表わすことができる．一般に面から手前に出る方向を，ベクトル $\boldsymbol{S}$ の正の方向と定義する．

電場の場合もある断面を通り抜ける電気力線の数を電束と呼び $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S}$ で表わす．面が曲面の場合は面素 $d\boldsymbol{S}$ とそこでの電場 $\boldsymbol{E}$ をとり，電束 $\varPhi$ は

$$\varPhi=\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-7}$$

と面積分で与えられる $\left(\int_S \text{は曲面 } S \text{ 上で積分することを意味する}\right)$.



(a) 均一に帯電している平面の電気力線　　(b) 点電荷の電気力線

図 2-4

2-5 Gauss の法則

式 (2-7) を図 2-4 (b) の点電荷を中心にしてかこむ球面の場合に応用してみよう．図から明白なように $\boldsymbol{E}$ は常に球面と直交するから，半径 r の球面を通り抜ける電束 $\boldsymbol{\Phi}$ は

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi r^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

と r に依存しない．つまり q を中心とする球面を通る電束は球の大きさにかかわらず一定で，その値は q/ε_0 で与えられる．この事実は q をかこむ表面が閉ざされていれば球面でなくても正しく，一般に

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2-8}$$

で表わされる．式 (2-8) は Gauss の法則と呼ばれる．ここで q は閉曲面 S 内のすべての電荷の和を意味する．次に式 (2-8) が一般に成り立つことを証明しよう．図 2-5 のように q が任意な閉曲面 S の中にある．q より r の距離にある S の面素を $d\boldsymbol{S}$，そこでの電場を $\boldsymbol{E}(r)$ とすれば $d\boldsymbol{S}$ での電束 $d\boldsymbol{\Phi}$ は

$$d\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = E\cdot dS\cdot\cos\theta$$

である．また dS が q の位置 O に対してつくる立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = dS\cdot\frac{\cos\theta}{r^2}$$

で，これより

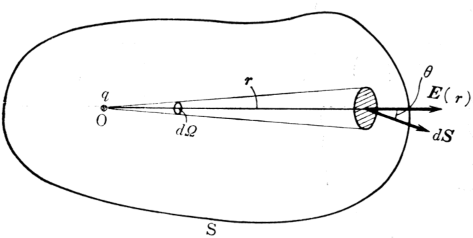


図 2-5 電荷 q をかこむ閉曲線 S

$$d\Phi=E\cdot dS\cdot\cos\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{d\Omega\cdot r^2}{\cos\theta}\cdot\cos\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$\Phi=\int d\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi}d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

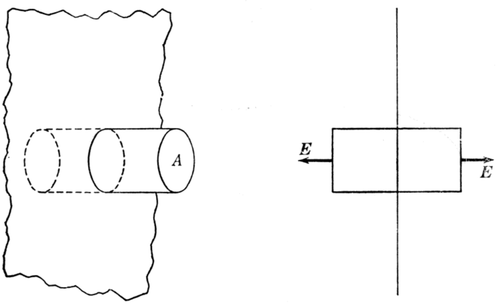
と証明できる．Gauss の法則は Coulomb の法則と同等で，同じ現象を別の形で表わしたものである．

早速 Gauss の法則を前述の均一に帯電した無限大の平面に応用してみよう．図 2-6 (a) のように底面積 A の円柱で帯電平面をかこむと，側面図図 2-6 (b) からわかるように電場 $\boldsymbol{E}$ は底面に垂直なので円柱側面を通る電束はゼロである．円柱表面にかこまれた電荷は σA で，Gauss の法則より

$$\Phi=2AE=\frac{\sigma A}{\varepsilon_0};\qquad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

と，前に Coulomb の法則で得た答と同じ値がずっと簡単に得られる．

Gauss の法則は積分の形で紹介されたが，それを微分形に書き換えてみよう．図 2-7 のような直交座標系をとり，その中に微小な直方体 $dxdydz$ をおく．この系での電場の3成分を E_x, E_y, E_z とし，直方体内に電荷が ρ C/m³ の密度で分布して，したがってその総量は $\rho dxdydz=q$ とする．電場の x 成分は図 2-7 のように向い面，つまり x が dx だけ増した所では E_x+dE_x となり，他の成分についても同様である．そこでこの直方体に Gauss の法則を応用すると，直方体が十分に小さいので



(a)　　(b)

図 2-6　均一に帯電した平面を円柱面でかこう

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = -E_x dydz + (E_x + dE_x)dydz - E_y dxdz$$
$$+ (E_y + dE_y)dxdz - E_z dxdy + (E_z + dE_z)dxdy$$
$$= dE_x dydz + dE_y dxdz + dE_z dxdy = \rho\frac{dxdydz}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho dv}{\varepsilon_0} \quad \text{(2-9)}$$

となる．ここで dv は直方体の体積素で，曲面の面素に相当する．また $\int_V$ は体積 V 上での体積積分を意味する．しかし

$$dE_x = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)dx, \qquad dE_y = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dy, \qquad dE_z = \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dz$$

とおけるので

$$dE_x dydz + dE_y dxdz + dE_z dxdy = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

である．これは $\rho dxdydz/\varepsilon_0$ に等しいから

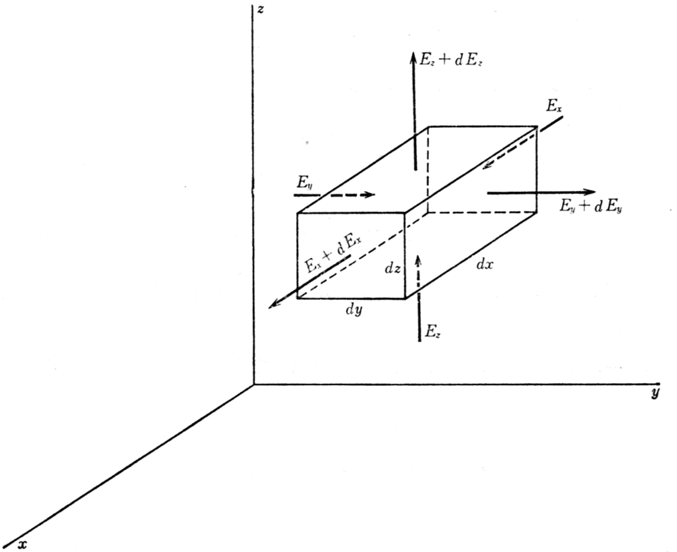


図 2-7

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2-10}$$

が得られる．ここで $\partial E_x/\partial x$ は E_x に対する x についての偏微分である．つまり x, y, z の関数である E_x の y と z を固定して，x についてのみ微分することを意味する．$\boldsymbol{E}$ は本来ベクトルなので，ベクトルに対する x, y, z 偏微分を表わすために $\boldsymbol{\nabla}$ という記号を次のように定義する．

$$\boldsymbol{\nabla}=\hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$\boldsymbol{\nabla}$ を使うと式（2–10）を

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2-11}$$

とベクトルの内積で表わすことができる．$\boldsymbol{\nabla}\cdot$ のベクトル演算は divergence と呼ばれる．

また式（2–11）を体積積分すると

$$\int_V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})dv=\int_V\rho\frac{dv}{\varepsilon_0}$$

となるが，この式の右辺は式（2–9）より

$$\int_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

に等しいから

$$\int_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})dv \tag{2-12}$$

の関係が成り立つ．これは任意のベクトルについても成り立つ関係で，Gauss の定理と呼ばれる．

式（2–11）はまさに場の方程式で，電磁気学を場の方程式で形成する第一段階である．

2-6 静電エネルギーと電位

電場により電荷に力が働くからには当然電気エネルギーの問題を考えなければならない．その例として電荷 q_1 から距離 r_{12} の所に無限に遠い所から電荷

q_2 をもってくるのに必要な仕事を計算しよう．仕事は力 $\boldsymbol{F}$ と距離の積で力が曲線 L 上に点 l_1 から l_2 まで働けば

$$W=\int_{l_1}^{l_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

の線積分で与えられる．電荷 q_1 による電場は q_1 を中心に放射線上にあるので，q_2 の動く行程がその放射線にあれば，仕事 W は

$$W=\int_{\infty}^{r_{12}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=-q_2\int_{\infty}^{r_{12}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{-q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_{12}}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \qquad (2\text{–}13)$$

となる．負のサインは，q_2 を動かす力が Coulomb 力にさからっていることを意味している．また q_2 が任意の曲線行程を通ったにしても，図 2–8 からわかるようにその線素 $d\boldsymbol{l}$ と放射線の長さ dr には $dl\cos\theta=dr$ の関係があるから

$$-q_2Edr=-q_2E\cos\theta dl=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

となり，q_2 を無限大より q_1 より r_{12} の位置にもってくるのに必要な仕事はその行程に依存しないことがわかる．これは Coulomb 力が保存力であることを意味する．W は r_{12} 離れている所に q_1, q_2 があるという配置をつくるのに必要なエネルギーだから，この電荷の配置の電位エネルギーと呼ばれ，力学の位置エネルギーに相当する．この際のゼロエネルギーの配置は q_1 と q_2 の距離が無限大の場合と定義される．2個以上の電荷 $q_1, q_2\cdots q_n$ の場合は重ね合せの理論から

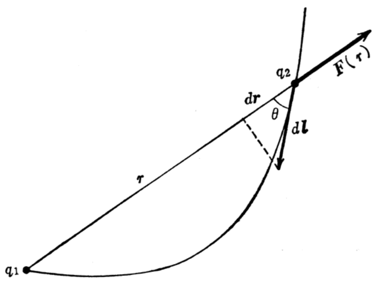


図 2-8 $d\boldsymbol{l}$ と dr との関係

$$W=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \tag{2-14}$$

で，i, j は 1 から n の値をとり，$i\neq j$ は和は $i=j$ の場合をのぞくことを意味する．

式 (2-13) を $q_2\times(q_1/4\pi\varepsilon_0 r_{12})$ とわけると，q_1 による電場が電荷 q_2 に働く力を q_2 で割った量であるように，電位エネルギーを q_2 で割った量 $q_1/4\pi\varepsilon_0 r_{12}$ にも物理的意味をもたせることができる．これを q_1 より r_{12} 離れた所での q_1 の電位またはポテンシャルと呼び，一般に

$$\phi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

と表わす．その単位は MKSA 系では J/C で volt（ボルト，V と略す）と名づけられている．

更に一般的には点 $1(x_1, y_1, z_1)$ での，点 $2(x_2, y_2, z_2)$ で電荷密度 $\rho(x_2, y_2, z_2)$ をもつ体積素 dv_2 によるポテンシャル $d\phi(x_1, y_1, z_1)$ は

$$d\phi(x_1, y_1, z_1)=\frac{\rho(x_2, y_2, z_2)dv_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

で与えられる．ここで r_{12} は点 1，2 間の距離である．したがって，点 1 でのそれ以外の点での電荷分布によるポテンシャルは

$$\phi(x_1, y_1, z_1)=\int_V\frac{\rho(x_2, y_2, z_2)dv_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2-15}$$

で与えられる．また点 1 での電荷密度が $\rho(x_1, y_1, z_1)$ なら，2 電荷分布のもつエネルギーは式 (2-14)，式 (2-15) より

$$W=\frac{1}{2}\int_V\phi(x_1, y_1, z_1)\rho(x_1, y_1, z_1)dv_1 \tag{2-16}$$

で与えられる．

ϕ は電場と異なってスカラー量で，電場との関係は式 (2-13) より

$$-\int_\infty^r \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\phi(r) \tag{2-17}$$

が得られる．式 (2-17) を直交座標成分にわければ

$$-\int(E_x dx+E_y dy+E_z dz)=\phi(r)$$

となり，更にこの式を x, y, z につき偏微分すると

$$-E_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad -E_y=\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad -E_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}\tag{2-18}$$

となる．スカラー ϕ を偏微分するとベクトル成分が得られるということはスカラーから数学的操作によりベクトルが得られることを意味し，その操作を前述の $\boldsymbol{\nabla}$ で表わすと式 (2-18) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{\nabla}\phi\tag{2-19}$$

となる．$\boldsymbol{\nabla}$ は gradient と呼ばれる．式 (2-19) は電場と電位の関係を示す．また $\boldsymbol{\nabla}$ は微分演算なので電位 ϕ に任意の定数を加えても電場は変わらない．これは電荷の電位を測る際なにをゼロ電位の基準にするかによって，その電位は変わるが電場は変わらないことを意味し，大切な量は電位の絶対値ではなく，電位差で，これは電圧と呼ばれる．

電位差はエネルギーではない．しかし q の電荷をもつ荷電粒子が電位差 V の中を通れば qV ジュールのエネルギーが得られる．そこでエネルギーの単位の一つとして electron volt（電子ボルト，eV と略す）が，分子，原子，原子核，高エネルギー物理で使われている．これは電荷1単位をもつ粒子が1ボルトの電位差を通ったときに取得するエネルギーで，

$$1\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times\mathrm{J/C}=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

で eV の千倍，百万倍，十億倍のエネルギーには KeV, MeV, GeV という単位がある．アメリカ Chicago 市の郊外にある Fermilab 研究所にある世界最大の陽子加速器は陽子を 5000 億電子ボルトのエネルギーまで加速する．これは 8.0×10^{-8} J のエネルギーである．もちろん 5000 億ボルトの静電圧をいっぺんにつくることは不可能である．巨大なドーナッツ型の軌道上で，高周波により電圧を何回も与えて最終エネルギーまで加速する．また Einstein の相体論で出てくる有名な質量 m とエネルギー E の関係式 $E=mc^2$ （c は光速）から，質量は E/c^2 でも与えられ，電子ボルトの単位を使うと，電子の質量は $0.5\,\mathrm{MeV}/c^2$，陽子は $938\,\mathrm{MeV}/c^2$ となる．

2-7 コンデンサーと電気エネルギーの密度

前節で電場があれば電位があり，電位があればエネルギーが求められることがわかった．そこでこのエネルギーはどこに存在するかという問題が起きるが，これにはっきりと答えることは不可能である．電場をつくる電荷より，電場のある空間に存在すると考えるのが妥当だろう．つまり電場にエネルギーがあると考えてよいだろう．そこで電場と電気エネルギーの関係をコンデンサーを例にとって求めよう．

コンデンサーは二つの電極から成り立ち，電荷をためる役割をする．その一番簡単な例は図 2-9 にあるような d の間隔におかれた面積 A をもつ導体板2枚である．電極1に電荷 q を，電極2に $-q$ を帯電させる．また板1と2での電位を ϕ_1, ϕ_2 とすれば電位差 V は

$$V=\phi_1-\phi_2=Ed$$

となる．$E=(q/A)/\varepsilon_0$ で与えられるから†

$$q=\frac{\varepsilon_0 A}{d}V$$

で電位差が帯電量に比例していることがわかる．一般に

$$q=CV \tag{2-20}$$

の関係があり，C は静電容量と呼ばれ，MKSA 系では C/V の単位をもち，farad（ファラッド，F と略す）と呼ばれる．

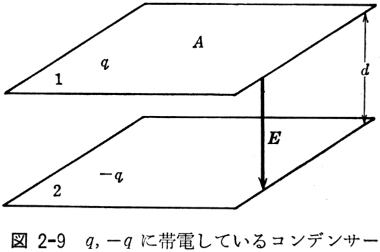


図 2-9 q, $-q$ に帯電しているコンデンサー

† これは式 (2-6) の値の2倍であることに注意すること．理由は付録Ⅰで述べてあるように，導体の内部では電場がゼロで，電荷は導体の表面にのみあるからである．

次にこのコンデンサーが q, $-q$ に帯電しているときに蓄えられたエネルギーを求めよう．これはコンデンサーを 0 から q に帯電するのに使われるエネルギーである．その過程の途中で極板 1 には q' が極板 2 には $-q'$ が帯電し，$-q'$ より dq' を q' にうつすと，そのときの仕事は

$$dW=Vdq'=\frac{q'}{C}dq'$$

である．それゆえ 0 から q に帯電させるに必要な仕事は

$$W=\int_0^q \frac{q'}{C}dq'=\frac{q^2}{2C} \tag{2-21}$$

である．しかし

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}, \qquad q=\varepsilon_0 EA$$

より

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{\varepsilon_0{}^2E^2A^2d}{2\varepsilon_0 A}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad$$

となる．だが Ad はコンデンサーの体積だから

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{W}{Ad}=U \tag{2-22}$$

と単位体積に蓄えられた静電エネルギー，つまりエネルギー密度は $\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2$ となる．この体積は電場のしめる空間なので，電場 $\boldsymbol{E}$ のもつエネルギー密度は $\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2$ であるといえる．式 (2-22) は一般の場合にも通用し，電場とエネルギーの関係が明白となった．

2-8 Coulomb 力が保存力であることによる電場の振舞い

Coulomb 力 $q\boldsymbol{E}$ は保存力であるので，静電場 $\boldsymbol{E}$ 内で電荷 q を閉曲線上 L を一まわり動かして出発点にもどせば，仕事

$$W=\oint_L q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

はゼロである．$\oint_L$ は閉曲線 L 上を一まわりする線積分で，$d\boldsymbol{l}$ はそのベクト

ル線素である．この閉曲線積分から $\boldsymbol{E}$ の振舞いを知るには Stokes の定理が必要である．

Stokes の定理を説明する前に $\boldsymbol{\nabla}$ とベクトル $\boldsymbol{F}$ の外積 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$ を説明しなければならない．$\boldsymbol{\nabla}\times$ の演算は curl または rotation と呼ばれ $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$ の 3 成分は

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

である．

Stokes の定理とはあるベクトル $\boldsymbol{F}$ があると $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$ をある曲面で面積分した値と，その曲面の境界線を一まわりする線積分の値とが等しいというものである．これは

$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_L\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{2-23}$$

の関係で表わせる．これを証明するに，図 2-10 のような辺 Δy, Δz をもつ微小な四角形 ABCD を考えよう．Δy, Δz は十分に小さいのでその間ではベクトル $\boldsymbol{F}$ の値があまり変化しない．式 (2-23) の線積分を ABCD で図 2-10 の矢じるしの方向で行うと

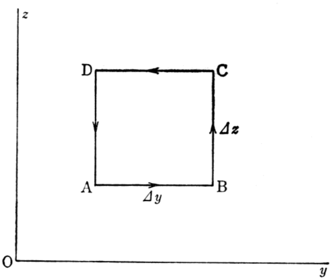


図 2-10 線積分の閉線 ABCDA

$$F_y\Delta y+\left(F_z+\frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z-\left(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z\right)\Delta y-F_z\cdot\Delta z \quad (2\text{-}24)$$

となる．F_y, F_z は点 A におけるベクトル $\boldsymbol{F}$ の y, z 成分で，$(\partial F_z/\partial y)\Delta y$ は y が $y+\Delta y$ になったときの F_z の変化量を意味する．式 (2-24) を整理すると

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z$$

となるが，$(\partial F_z/\partial y-\partial F_y/\partial z)$ は $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})$ の x 成分で，$\Delta y\Delta z$ はこの四角形の面積だから

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})_x dS$$

となる．ここで $d\boldsymbol{S}$ は面 ABCD に垂直なベクトルで $\Delta y\Delta z$ の長さをもち，方向は x 方向で（紙面に手前に垂直）ある．この論議を三次元に発展させ，曲面 S をとりその面素を $d\boldsymbol{S}$，その境界線 L 上の線素を $d\boldsymbol{l}$ とすれば

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}$$

と Stokes の定理が証明できた．

この定理より

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}$$

となり，

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

より

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0$$

が得られる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0$$

の 2 式は静電場のすべての振舞いを記述する．また電位 ϕ を使えば $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$ より

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(-\nabla\phi)$$

となる．これより

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})_x=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0$$

で，他成分も同様にゼロであり，Stokes の定理を使って出した結果と同じになる．これは $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ が成り立つ理由は Coulomb 力が保存力であるからで，後述の $\nabla\times\boldsymbol{E}\neq 0$ のような電場では保存力ができず，電場がスカラー量の gradient だけでは与えられないことを意味する．

第 3 章

静磁場と定常電流

3-1 Lorentz 力

磁石は天然にも存在し，鉄を引きつけるとか，磁石同士がその相対的配置によりお互いを引きつけたり反発し合ったりすることは古くから知られていた．また地球に磁気があることも知られ，コンパスが発明された．磁石の力の振舞いは一見静電荷の振舞いに似ているが，根本的な違いは，電荷は正と負と個別に存在するが，磁石では北極と南極をわけることができないことである．北極と南極は常に対として存在する．そこで磁気学は電気学とは独立した学問かと考えられていた．しかし 1820 年に Oersted がコンパスの針に平行に走る電線に電流を流したところ針が動き，更に電流の向きを逆にしたらコンパスの動きも逆になることを発見し，電荷の流れである電流と磁石の間に深いつながりがあることを示した．

この関係について話を進める前にまず磁場を定義しておく．磁場は電場や重

力のない空間で電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているときに受ける力 $\boldsymbol{F}$ より定義される．磁場† を $\boldsymbol{B}$ で表わすとこの力は，

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3-1}$$

で与えられる．$\boldsymbol{B}$ の単位は N/(C·m/s) で，これは weber/m^2 と呼ばれる．1 weber/m^2 を 10^4 gauss として gauss という単位が定義され，gauss が磁場の強さの実用単位としてよく使われる．また weber/m^2 は tesla とも呼ばれる．

式 (3-1) からわかるように，力の方向は電荷の速度と磁場の方向とに垂直である．そのため磁場による電荷に対する仕事はゼロで，電荷の運動エネルギーは静磁場によっては変わらない．また電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が存在する場合，$\boldsymbol{v}$ の速度で動いている電荷にかかる力は

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3-2}$$

で表わされ，この力のことを Lorentz 力と呼ぶ．

Lorentz 力を応用すれば電子の電荷 (e) と質量 (m) の比，e/m を測ることができる．それには図 3-1 のように速度 $\boldsymbol{v}$ をもつ電子をなんらかの方法で発生させ，電場と磁場が直交している空間（図 3-1 では $\boldsymbol{E}$ は $-z$ 方向，$\boldsymbol{B}$ は $+y$，つまり紙の面に入る方向，$\boldsymbol{v}$ は $+x$ 方向である）に走らせばよい．この空間で電子は Lorentz 力を受けるので，その軌道が変わるが，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ をうまく調整すれば電場と磁場による力が打ち消し合い，電子の軌道を $\boldsymbol{E}$ と

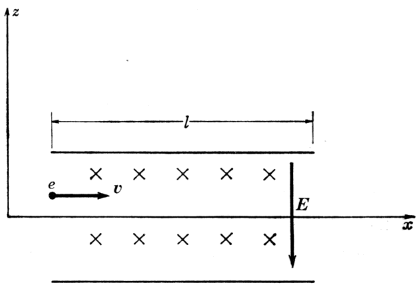


図 3-1　電子の e/m を測る装置

× は磁場が $+y$ 方向（紙面に入る方向）にあることを意味する．

† 磁束密度とも呼ばれる．

$\boldsymbol{B}$ がなかったときと同じにすることができる．その条件は $e\boldsymbol{E}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ から $E=vB$ である．またその後 $\boldsymbol{B}$ を消すと $\boldsymbol{E}$ のみによる力から電子は $+z$ の方向に力を受けるので，x 方向に l だけ走ったときにその軌道は $+z$ 方向に $\varDelta z$ だけずれる．$\varDelta z$ は v が小さければ非相対論的に力学から簡単に求められ

$$\varDelta z=\frac{1}{2}at^2=\frac{eE}{2m}\left(\frac{l}{v}\right)^2$$

ここで a は電子の加速度，t は電子が l の距離を走る時間である．上式に $v=E/B$ を代入すると

$$\varDelta z=\frac{eE}{2m}\frac{l^2}{E^2}B^2$$

$$\therefore\quad \frac{e}{m}=2\frac{\varDelta zE}{B^2l^2}$$

と e/m が求められる．

磁場を通る荷電粒子にかかる力はその方向に垂直であるから，磁場内での粒子の軌道は一般にはヘリックス，また進行方向と磁場が直交している場合は円である．この性質は原子核や高エネルギー物理の実験のための荷電粒子の加速器等に広く応用されている．その一例として荷電粒子の運動量の測定について説明することにする．

質量 m，速度 v，電荷 q の粒子が磁場 B の中を磁場に直交して進んでいるとする．速度 v は十分におそく相対論的効果を考えなくてもよいとすれば，粒子の運動量は mv で与えられる．磁場による力は

$$F=qvB=ma$$

だが，加速度 a は円運動の場合は v^2/r（r は円の半径）で与えられるから

$$qvB=mv^2/r$$

より

$$mv=qBr$$

と粒子の円軌道の半径を求めればその運動量がわかるわけである．なおこの関係は mv を運動量 p とおき換えれば相対論的効果のある場合でも正しい．

3-2 電 流

第2章では真空中で静止している電荷について話を進めたが，この章ではまず導体中での電荷の流れ，つまり電流について簡単にふれる．ここでは二点に電位差があるとその間に電流が流れる物体を導体と呼ぶ．そして，導体中のどこでもその断面を，電荷 q が時間 t の間に通り抜ければ，電流 q/t が流れるという．q を coulomb で表わせば電流の単位は C/s で，これを ampere（A と略す）と呼ぶ．電流の流れの方向は正の電流が**流れるであろう**方向，つまり高い電位から低い電位への流れを正の方向と定義する．ここで**流れるであろう**と書いたのは，電流の流れは必ずしも実際の電荷の流れと同じでないからで，実際に導体を流れる電荷は電子の電荷で負である．

電荷と同様に電流密度を考えることができる．これは単位断面積に垂直な方向に流れる電流で，ベクトル量 $\boldsymbol{j}$ で表わせる．したがって，ある断面 S を流れる電流 i は

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

で表わせる．電流密度 $\boldsymbol{j}$ をもつ電流が流れている所を閉曲面 S でかこみ

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

と面積分すると，これは単位時間にこの閉曲面から流れ出す電荷である．この閉曲面にかこまれた空間内の電荷密度を ρ とすれば，その中の全電荷量は

$$\int_V \rho dv$$

（ここで V はこの空間の体積で，dv は体積素である）したがって次の式が成り立つ．

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dv \tag{3-3}$$

ここで Gauss の定理（式 (2-12)）を使えば

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}dv = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dv = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dv$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3-4}$$

が得られる．この式は連続の方程式で，電荷が保存されることを意味している．定常電流の場合は閉曲面に入る電流と，それより出る電流が同じだから

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

で，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0; \qquad -\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{3-5}$$

となる．

さて電流は電荷の流れだから磁場の中を流れる電流にも当然 Lorentz 力がかかってくるはずで，図 3-2 のように断面積 A をもつ電線の中を電流密度 $\boldsymbol{j}$ が流れ，その流れに直交して磁場 $\boldsymbol{B}$ があるとすると，その電線の線素 Δl にかかる力 $d\boldsymbol{F}$ は

$$d\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{j}A\times\boldsymbol{B})\Delta l=\Delta l\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B} \tag{3-6}$$

で，ここで $\boldsymbol{i}$ は電流である．この関係は $\boldsymbol{i}=A\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$（$\rho$ は電荷密度，$\boldsymbol{v}$ は電荷の速度）だから単位体積に含まれる電荷にかかる力は $\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ で，線素の体積は $A\times\Delta l$ であることから得られる．

磁場が電流に力を加えるならその反作用として電流も磁場に力を与えるはずである．これは前記の Oersted の実験で立証され，電流が磁場をつくることはわかったが，この現象を定量化したのは Ampere であった．

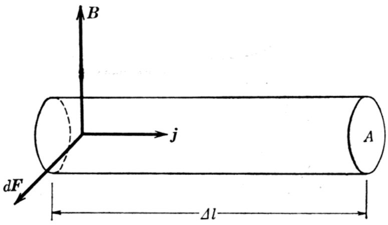


図 3-2 電線 Δl にかかる力

3-3　Ampere の法則

図 3-3 のような閉曲線 L にかこまれた曲面 S を通り抜ける電流が i であると，Ampere の法則によれば，この電流と，それによってつくられる磁場との関係は

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 i \tag{3-7}$$

である．ここで $d\boldsymbol{l}$ は L の線素，μ_0 は定数で，その値は $4\pi\times10^{-7}$ wb/A-m である．この値は実験値ではなく，与えられた値である．

Ampere の法則は静電気の Gauss の法則に対応するもので，静磁場（あるいは定常電流）の振舞いを記述する式である．また直線電流による磁場を

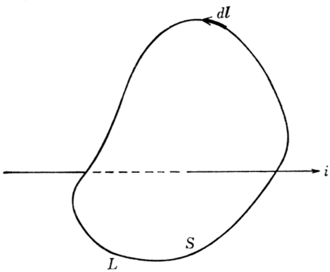


図 3-3
閉曲線 L にかこまれる曲面 S を電流 i が通り抜ける．

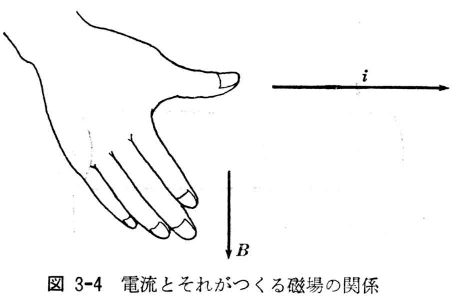


図 3-4　電流とそれがつくる磁場の関係

Lorentz 力により観測すると，その方向は正の電流にそって右まわりの方向，つまり図 3-4 のように正の電流にそって右手の親指をおくと他の指の差す方向である．次に Ampere の法則を応用してみよう．

3-3-1 直線電流による磁場

図 3-5 のように長い直線に電流 i が流れていれば，電線から垂直方向 r の距離の点での磁場 $B(r)$ は，常に半径 r の円の接線方向にあるから，

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i$$

より

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

で与えられる．

またこの電線と平行で d だけ離れている電線に電流 i' が流れればこの電線の受ける力は式 (3-6) より

$$\boldsymbol{F} = i'\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 i' i l \hat{d}}{2\pi d}$$

となる．ここで l はこの電線の長さで，i' と i が同じ方向に流れれば F は引力である．1 ampere の電流はここで $i'=i$, $d=1$ m のとき，電線の単位長に対する力 $F/l=\mu_0 i^2/2\pi$ を 2×10^{-7} N/m とする電流と定義される．そのた

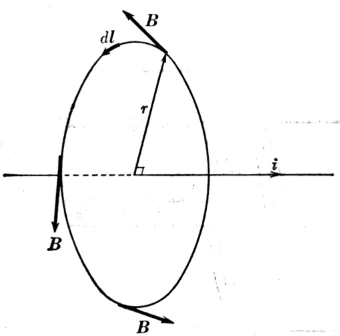


図 3-5 直線電流による磁場

め μ_0 は ε_0 のように実験値ではなく与えられた数である．また電荷の単位，coulomb は前記のように ampere より定義される．

3-3-2　無限に長いソレノイドの磁場

図3-6のような円柱形のコイルはソレノイドと呼ばれる．このコイルに電流を流せばソレノイド内に磁場が発生し，その主成分は円柱の軸方向 x にあることは明白である．またソレノイドが無限に長い場合は x 成分しかなく，かつ x に依存しない．これを証明するために，ソレノイドに流れる電流を i とし，ソレノイド単位長につき n 回コイルが巻いてあるとして，Ampere の法則を使って磁場を求めよう．図のように閉じた経路 ABCDA をとれば線積分

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$$

は $AB\times B_x$ となる．辺 AD, BC にそっては磁場成分がないし，また辺 DC にそって磁場成分があれば，それよりもっとソレノイドから離れた所の辺 D′C′ にそっても同じ成分がなければ線積分の値が変わってしまう．しかし辺 D′C′ をソレノイドから遠く離れた所にとってもそれにそって磁場成分があるということは，ソレノイドの外部に無限遠に広がる均一の磁場があることを意味し，これは Ampere の法則に反する．それゆえ外部磁場はゼロでなければならな

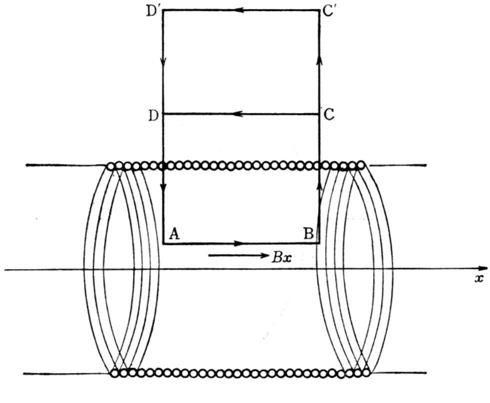


図 3-6　ソレノイドによる磁場

い．辺 AB の長さを L とすると

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = LB_x = \mu_0 Lni$$

$$\therefore \quad B_x = \mu_0 ni \tag{3-8}$$

が得られ，無限に長いソレノイドの内部磁場は一定でコイルの単位長に対する巻き数と電流にのみ比例することがわかる．

3-4　磁場とベクトルポテンシャル

磁場の場合も電場と同様に磁場の束，つまり磁束を

$$\Phi_B = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

と定義でき（単位は weber），また磁気力線も電気力線と同様に定義できる．また磁場内に閉曲面をおけばそこから出てゆく磁束は閉曲面内に電流が流れていようがいまいがゼロである．これは直線電流による磁場を例にとれば明白で，図 3-7 のような閉曲面 S_1, S_2 をとればいずれの場合でも Φ_B はゼロになる．もっと複雑な磁場でもこのような直線電流による磁場の重ね合せでできるから，

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

は常に正しい．これが静磁場の Gauss の法則であり，この微分形は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{3-9}$$

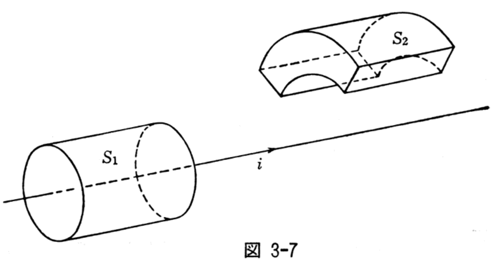


図 3-7
閉曲面 S_1, S_2 での磁束はゼロである．

である.

また Ampere の法則に Stokes の定理を応用すれば

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0 i$$

となる. しかし

$$i=\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

より

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{3-10}$$

で式 (3-9) と (3-10) で静磁場のすべての振舞いが記述される. これらも場の方程式と考えられる.

電場はスカラーポテンシャル ϕ で $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ と表わせたが, 磁場の場合は $\nabla\times\boldsymbol{B}$ がゼロでないのでスカラーポテンシャルを使うことはできない. しかし任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ の curl† の divergence はゼロ, つまり

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

という性質を利用すれば $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ より $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ と表わすことができる. $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれ, 電場のスカラーポテンシャルに相当する.

ベクトルポテンシャルを使うと式 (3-10) より

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu_0\boldsymbol{j}$$

が得られ, この式をベクトル成分にわけると

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=\mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\mu_0 j_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)=\mu_0 j_z$$

となる. そして x 成分だけとると

† curl という用語は英米流で, ヨーロッパ流では rotation, または略して, rot という用語が使われる.

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}=\mu_0 j_x$$

で，上式に

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

を加えると

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}=\mu_0 j_x$$

となる．更に左辺を整理すると

$$-\nabla^2 A_x+\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})=\mu_0 j_x \tag{3-11}$$

が得られる†.

式 (3-11) の解を求める前に，少しの間前章にもどってスカラーポテンシャル ϕ の振舞いを考えよう．

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

より

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3-12}$$

が得られ，これは Laplace の方程式と呼ばれる．ϕ は電位だから式 (2-15) で与えられる，電荷密度 ρ をもつ電荷分布による電位

$$\phi=\int_V \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{3-13}$$

は当然式 (3-12) の解である．

さて式 (3-12) と (3-11) を比べると式 (3-11) の左辺の第 2 項がゼロなら，ともに同じ形をとることがわかる．そこで $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ と仮定すれば式 (3-11) は

$$\nabla^2 A_x=-\mu_0 j_x$$

† ここで $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

で，この解は式 (3-13) と同じ形をしていればよく

$$A_x=\mu_0\int_V \frac{j_x dv}{4\pi r}$$

で与えられる．他成分についても同様な解が得られるから，全体としてはベクトルの形で

$$\boldsymbol{A}(x_1, y_1, z_1)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(x_2, y_2, z_2)dv_2}{r_{12}} \tag{3-14}$$

で与えられる．ここで (x_1, y_1, z_1) は $\boldsymbol{A}$ を求める場所の座標，(x_2, y_2, z_2) は $\boldsymbol{j}$ の流れる場所の座標で，r_{12} はその2点間の距離で，dv_2 は $\boldsymbol{j}$ の流れている所での体積素である．$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ の仮定は一見こじつけのようだが，その仮定の下で得られた解，式 (3-14) が $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ 条件を満たせばよく，そのためには $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$ でなくてはならない．つまり定常電流の場合のみ式 (3-14) でベクトルポテンシャルが与えられることを意味する．

3-5　Biot-Savart の法則

ベクトルポテンシャルの応用として任意の曲線を流れる電流による磁場を求めよう．図 3-8 にあるような曲線に電流密度 $\boldsymbol{j}$ の電流が流れている．曲線の線素 $d\boldsymbol{l}$ による，それより r 離れている点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ でのベクトルポテンシ

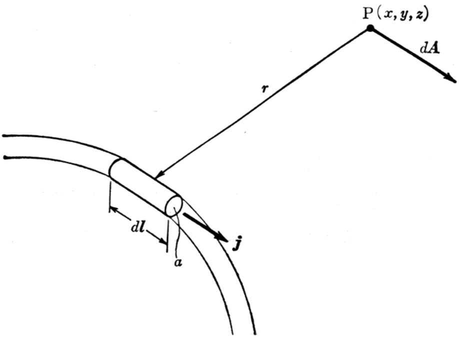


図 3-8　点 P で dl によるベクトルポテンシャル $d\boldsymbol{A}$

ャル $d\boldsymbol{A}$ は式 (3-14) より

$$d\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu_0\boldsymbol{j}}{4\pi}\frac{dl\times a}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\boldsymbol{l}}{r}$$

で与えられる．ここで a は曲線の断面積で，$i=ja$，$\boldsymbol{j}//d\boldsymbol{l}$ である．このベクトルポテンシャルによる磁場 $d\boldsymbol{B}$ は

$$d\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times d\boldsymbol{A}=\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}\right)\left[\boldsymbol{\nabla}\times d\boldsymbol{l}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \tag{3-15}$$

である．ここで $d\boldsymbol{l}$ は定数だから，$\boldsymbol{\nabla}$ は $(1/r)$ のみにかかるので，式 (3-15) は

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left[-d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

となる．ここで負の記号はベクトルの外積の順を変えたからである．

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\hat{r}}{r^2}$$

だから

$$d\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 id\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 i\hat{r}\times d\boldsymbol{l}}{4\pi r^2} \tag{3-16}$$

となる．点 P における磁場 $\boldsymbol{B}$ は曲線上のすべての線素からの磁場の和で，曲線を L とすれば

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_L\frac{\hat{r}\times d\boldsymbol{l}}{r^2} \tag{3-17}$$

で与えられる．式 (3-16) は Biot-Savart の式と呼ばれる．次にこの式の応用として半径 R の環状の電線を流れる電流 i による，環の軸上での点 P における磁場を求めよう．

図 3-9 より軸対称性から B には x 成分しかないことがわかる．したがって

$$B=\int dB\cos\theta$$

となる．dB は

$$dB=\frac{\mu_0 idl}{4\pi(x^2+R^2)}$$

で,

$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{Rdl}{(x^2+R^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 i\,2\pi R^2}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}$$

となる. $x \gg R$ の場合は

$$B=\frac{\mu_0 i R^2\,2\pi R^2}{4\pi x^3}$$

となる.

πR^2 は環の面積で, これを S とし, ベクトル量で表わすと,

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 i\boldsymbol{S}}{2\pi x^3}$$

となる. Si は磁気双極モーメントと呼ばれ, ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ で表わされる. これは前記の電気双極モーメントに相当する.

ミクロの世界では電子, 中性子, 陽子等多くの粒子が地球が自転するように自転していることが知られ, これらの粒子はスピンをもつといわれる. もちろんミクロの世界の現象は量子力学的に記述しなければならず, 古典的物理学では正しく理解できない. しかし電荷をもつ粒子が自転すれば環状の電流が流れるような状態ができ, 電子, 陽子には磁気モーメントがあると考えられ, これは実験でも立証されている. また電気的に中性な中性子にも磁気モーメントがあることから, 中性子は全体としては電気的には中性でも部分的には電荷をもっていることが示唆される. これは Yukawa の中間子の理論から予測できる. すなわち, 中性子が“陽子”と“負の電荷をもつパイ中間子”とで成り立つような状態が, 極めて短い時間であるが存在しうることを考えれば予測できる.

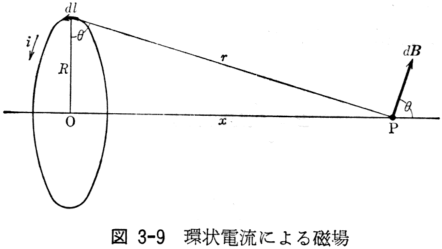


図 3-9 環状電流による磁場

3-6 磁気エネルギー

前に述べたように2本の平行な電線に電流が流れればその相対的方向により電線間に引力，または斥力が働く．したがってこのような電流の配置をたもつためには，電線にこの力を打ち消す力を常時加えていなければならない．これは電荷の配置の場合と同様，静磁場に磁気エネルギーがあることを意味する．そこで前節の磁気双極モーメントを例にとってこのエネルギーを求め，静電場の場合と比較しよう．

話を簡単にするために環状の電流でなく図 3-10 (a) のような ABCD の正方形のコイルを考えよう．そしてこのコイルは均一な外部磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に図 3-10 (b) で示される配置にある．コイルの各辺にかかる力は式 (3-6) より，辺 AB, DC では $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{DC}}$ で，コイル平面上にあるためコイルを動かすことはできない．しかし辺 BC, AD にかかる力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AD}}$ は，コイル平面に対して θ の角度をもつからコイルに対してトルクがかかり，コイルは回転する．F_{BC}, F_{AD} の大きさは $F_{\mathrm{BC}}=F_{\mathrm{AD}}=iLB$ (L は辺の長さ) で，トルク $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}$$

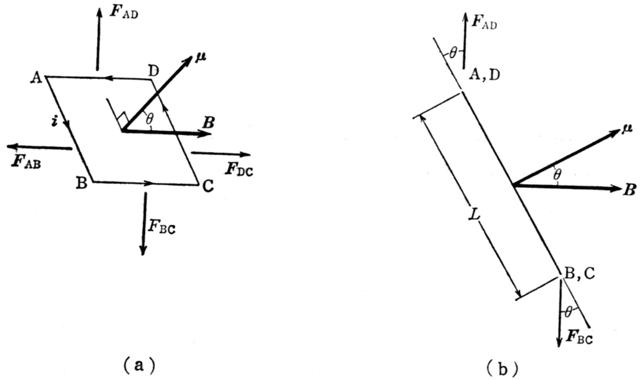


図 3-10 均一磁場内の正方形のコイルに流れる電流にかかる力

より

$$\tau = L\sin\theta iLB = iL^2B\sin\theta$$

となる．しかし L^2 はコイルの面積だから，iL^2 はこのコイルの磁気双極モーメントで，図 3-10 (a)，(b) のようにベクトル $\boldsymbol{\mu}$ で表わされ，$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}$ となる．このトルクはコイルを θ を小さくする方向に回転させ，微小角 $d\theta$ だけ回転させるのに必要な仕事 dW は，力学より

$$dW = -\tau d\theta$$

で与えられる．この場合は，

$$dW = -\mu B\sin\theta d\theta$$

となる．

$\theta=0$ のときトルクはゼロになることと考えると，θ より 0° までコイルを回転させると

$$-\int_\theta^0 \mu B\sin\theta d\theta = \int_{\cos\theta}^1 \mu B d\cos\theta = \mu B - \mu B\cos\theta$$

となる．エネルギーは $\theta=0°$ のとき最小となるから，μB をエネルギーのゼロの基準点とすれば，コイルを θ から $\theta=0$ まで回転させるために必要なエネルギーは，

$$W = -\mu B\cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$$

となる．したがってコイルが図 3-10 (a)，(b) のような配置にあるときにもつエネルギーは

$$W = \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3-18}$$

である†．

任意の閉曲線 L に流れる電流の場合でも，この閉曲線にかこまれる任意の曲面 S が微小な正方形のコイルで構成されると考えれば，図 3-11 のように隣りあった辺を流れる電流は打ち消されるので，この閉曲線電流が磁場 $\boldsymbol{B}$ の中でもつエネルギーは

$$W = i\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

---

† ここで符号が前と変わるのは，磁場中で電線が動くと，次章に出てくる電磁誘導の現象で電流がコイルに流れるためで，やや複雑な理由による．くわしくはファインマン，レイトン，サンズ著，宮島龍興訳，"ファインマン物理学 III"（岩波書店）を参照．

となる．

しかし $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と Stokes の定理より

$$W=i\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=i\oint_L\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

で，また曲線の断面積を a とし，電流密度を $\boldsymbol{j}$ とすれば，$i=ja$ で，$d\boldsymbol{l}/\!/\boldsymbol{j}$，$adl=dv$ から

$$W=i\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_V\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}dv \tag{3-19}$$

が得られる．

多くの定常電流が分布する空間では，その内から任意の対をえらび，一つの電流が他の電流によるベクトルポテンシャルと式 (3-19) の形で相互作用してもつエネルギーをすべての対について求め，加えれば全体の磁気エネルギーは

$$W=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}dv \tag{3-20}$$

で与えられる．ここで 1/2 は対を 2 回数えるからで，電荷分布による電気エネルギーの場合と同じである．式 (3-20) と前章の式 (2-16)

$$W=\frac{1}{2}\int_V\rho\phi dv$$

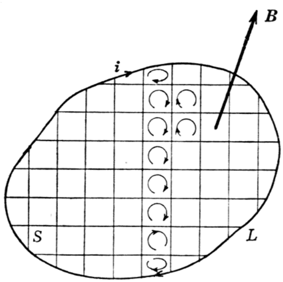


図 3-11

任意の閉曲線 L に流れる電流を，その曲線にかこまれる任意の曲面 S 上の微小な正方形コイルを流れる電流でおき換える．

とを比較すると，静電場，静磁場における ϕ と $\boldsymbol{A}$, ρ と $\boldsymbol{j}$ との対応性が明白にわかる．これで電場と同様に磁場にもエネルギーがあることがわかった．

第 4 章

電磁誘導

前の2章で静電場と定常電流による静磁場の概念とそれらの相互作用を記述する根本的な方程式を導入した．また静磁場と定常電流との関係から電気と磁気はまったく独立した自然現象ではなく，なんらかの形で関連していることが示唆された．

この章では電場，磁場がともに時間的に変化する場合を考え，この二つが密接な関係にあることを示し，電気と磁気の統合を更に一歩進めよう．

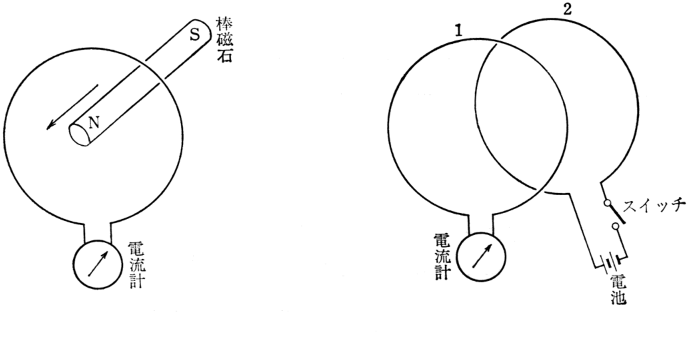
4-1 Faraday の法則

Faraday は1831年に一連の実験を行って，その結果電磁誘導の原理を発見した．この現象は第3章で述べた磁場内に電流を流せばそれに力が働くという現象の逆で，磁場内で電線に力を加えて動かせば電線に電流が流れるというものである（これは電線を固定して磁場を変化させるのと同等である）．これは図 4-1 (a) のように電線でできたループの両端に敏感な電流計をつないでおい

て，棒磁石を急にループ内に挿入すれば，その際電流計が振れることからわかる．次に磁石を急に引き出すとまた電流が流れるが，その方向が前と反対になることが観察された．棒磁石の代りに図 4-1 (b) のように，もう一つ電線のループをそばにおき，その両端をスイッチを通して電池につなぎ，スイッチを閉じると，そのときだけ他のループに電流が流れることが観察され，またスイッチを開いて電流の流れをとめると，そのときだけ電流が前とは逆の方向に流れることも観察された．しかし棒磁石が不動なときや，二つ目のループに定常電流が流れているときにはループに電流が流れない．

以上の実験事実から電流はループ内の磁場の変化により誘導されることがわかる．また Faraday は色々と実験条件を変えて，その結果誘導される電流はループをつらぬく磁束の時間変化に比例することを発見した．また電線を色々変えた結果磁束の時間変化により誘導されるものは起電力で，その結果電流が流れることを発見した．起電力とは閉ざされた回路に電流を流す源（電池のように化学反応によるものや，発電機のように機械エネルギーによるものもある）で，単位電荷に対してなされる仕事で，電位と同じ次元をもち，MKSA 系ではボルトが単位である（我々が通常使う乾電池（単1，単2，単3型など）は 1.5 ボルトの起電力をもっている）．

Faraday の法則を方程式で表わせば



（a）　　（b）

図 4-1

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{4-1}$$

となり，$\mathcal{E}$ は起電力，Φ_B は磁束である．また負のサインは起電力が磁束の時間に対する減少率に比例していることを示す．電流の向きと磁束の時間的変化の向きは，誘導された起電力が，閉ざされた回路を通り抜ける磁束の時間変化を打ち消すような磁場をつくる電流を流すという関係にあり，これは Lenz の法則とも呼ばれている．

次に均一の磁場を閉ざされた回路が一定の速度で横切る場合を考えてみよう．磁場は図 4-2 のように紙面に向かって垂直で，回路は幅 l の長い長方形で x 方向に速度 v で動く．

回路を突き抜ける磁束は Blx で，その時間変化率は

$$\frac{d(Blx)}{dt}=Bl\left(\frac{dx}{dt}\right)=Blv$$

で，よって回路に誘導される起電力 $\mathcal{E}$ は，

$$\mathcal{E}=-Blv$$

である．この起電力により回路に電流 i が流れるため，回路の辺に力が働く．この力を図 4-2 のように F_1, F_2, F_3 とすると対称性から $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$ となり，互いに打ち消すが，F_1 は $F_1=iBl$ となる．そのためこの回路を v の速度で距離 x だけ引っぱるには $W=F_1x$ の仕事をしなければならず，$W=iBlx$ となる．

次にこの例を一般化し，任意の磁場 $\boldsymbol{B}$ 内で任意の形をもつ閉ざされた回路が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いた際の誘導起電力 $\mathcal{E}$ を考えよう．任意の閉曲線の形をもつ回

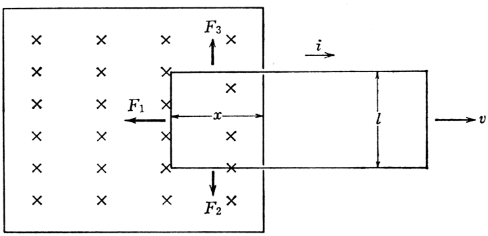


図 4-2
磁場を横切る閉回路に電流が誘導される．

路にかこまれた任意の曲面を図 4-3 のように S とし，そのベクトル面素を $d\boldsymbol{S}$ とする．時間 t のときの回路の位置を L_1（図 4-3）とすると回路をつらぬく磁束は

$$\Phi_B(t)=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

である．閉曲線の形は変わらないから S は L_1, L_2 の位置で同じである．時間 $t+dt$ のときに回路が図 4-3 の L_2 の位置に速度 $\boldsymbol{v}$ で動いたとする．この動きによる磁束の変化 $\Delta\Phi_B$ は図 4-3 で示される，動く前と後の曲面 S の間の側面 S' を突き抜ける磁束

$$\Delta\Phi_B=\int_{S'} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}'$$

である．これは閉曲面（この場合，L_1 と L_2 にある曲面 S と側面 S' によって成り立っている）を突き抜ける磁束はゼロだからである．閉曲線回路の線素を $d\boldsymbol{l}$ とすれば図 4-3 より

$$\Delta\Phi_B=\int_{S'} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}'=\oint_L \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}dt\times d\boldsymbol{l})$$

となる．そこで起電力は

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\oint_L \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{l})$$

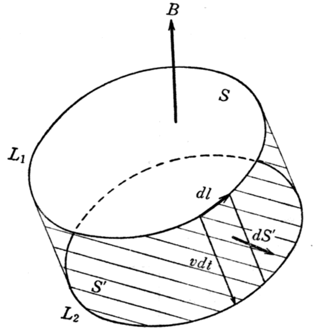


図 4-3

$$=\oint_L (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．この最後のステップは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$ というベクトルの性質を使って得られた†.

起電力は電位差を起こす源なので，長さ $\boldsymbol{l}$ の回路に起電力が起きるということは回路上に電場 $\boldsymbol{E}$ があることを意味し

$$\mathcal{E}=\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{4-2}$$

となる．式 (4-2) と (4-1) を比べると

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4-3}$$

となる．この式の微分形は Stokes の定理より

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-4}$$

が得られる．

式 (4-4) は電場と磁場が密接な関係にあり，磁場の時間変化により $\nabla\times\boldsymbol{E}$ が一義的に決められることを意味する．しかしこれにより電場 $\boldsymbol{E}$ も一義的に決まるわけではない．なぜなら $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ を満たす電場（つまり静電場）をいくら加えても式 (4-4) の関係がたもたれるからである．式 (4-4) により初めて電気学と磁気学が統合され，電磁気学が生まれ，その後 Maxwell により古典電磁気学が確立された．ここで注目しなければならないことは式 (4-2) の場合

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\neq 0$$

であることだ．電場 $\boldsymbol{E}$ が静電場の場合は第 2 章で述べたように，

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

は同じ点での電位差を意味するのでゼロである．しかし誘導された電場の場合

† 付録 III 参照.

はそうでなく，スカラーポテンシャルだけでは求められないことを示している．

4-2 インダクタンス

4-2-1 自己インダクタンス

時間変化する磁場はなにも外部から与えられる必要はない．コイルに時間的に変化する電流（たとえば交流電流）を流せば，その電流がつくる磁場も時間変化し，したがってコイルを通り抜ける磁束も変化する．そのためコイルにその変化を打ち消す磁束をつくる電流を流す起電力が誘導される．つまりコイルに電流を流し始めたときには，流れにさからう電流が誘導され，電流を切ったときにはその電流を維持しようとする電流が誘導される．コイルが電線を N 回すきまなく巻いてつくったソレノイドであれば，ソレノイドを通り抜ける磁束は $N\Phi_B$ で，コイルに流れる電流 i に比例するから

$$N\Phi_B = Li \tag{4-5}$$

で与えることができる．ここで比例係数 L を自己インダクタンスと呼ぶ．誘導された起電力 $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{4-6}$$

となる．L は Vs/A の単位をもち，これには henry（H と略す）という名がつけられている．自己インダクタンスは電荷の場合のコンデンサーの電気容量 C に対応するもので，C と同様コイルの形と大きさから決められる．その一例として断面積 A，長さ l，単位長に対するコイルの巻き数 n のソレノイドの自己インダクタンスを計算しよう．電流 i が流れればソレノイドの中につくられる磁場 B は式 (3-8) より $B=\mu_0 ni$ となるので，ソレノイドを通り抜ける総磁束は

$$nl\Phi_B = nl(\mu_0 niA) = \mu_0 n^2 lAi$$

である．式 (4-5) より自己インダクタンスは，非常に長いソレノイドの場合

$$L = \frac{\mu_0 n^2 lAi}{i} = \mu_0 n^2 lA \tag{4-7}$$

となる．

4-2-2 相互インダクタンス

図 4-1 (b) のように二つの 1 回巻きのコイル等，閉ざされた回路がお互いの近くにあり，一つの回路（コイル 1）の電流の変化により，もう一つの回路（コイル 2）を通り抜ける磁束が変化すれば，その回路に起電力が誘導される．そしてもちろんコイル 1 には自己誘導による起電力が起きる．そこで上記の自己インダクタンスの場合と同じ手法でコイル 1 の電流変化 di_1/dt によりコイル 2 に誘導された起電力 $\mathcal{E}_2$ を求めよう．この場合の相互インダクタンス M_{21} は次のように定義される．

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

この逆の場合，つまりコイル 2 の電流変化によりコイル 1 に誘導される起電力 $\mathcal{E}_1$ は

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

である．次に $M_{12}=M_{21}$ であることを証明しよう．

コイル 2 のつくる面を通り抜ける磁束は

$$\int_{S_2}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_2 = \int_{S_2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}_2 = \oint_{L_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}_2$$

（この線積分はコイル 2 を一周して行う）となる．そこで

$$\oint_{L_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}_2 = \int_{S_2}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_2$$

$$\therefore\quad \mathcal{E}_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_{L_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}_2 \qquad (4\text{–}8)$$

しかしこのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ はコイル 1 の電流によるから，式 (3–14) より

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i_1 d\boldsymbol{l}_1}{r}$$

（ここで r は線素 $d\boldsymbol{l}_1$ と $d\boldsymbol{l}_2$ との間の距離）で，これを式 (4–8) に代入すれば

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d}{dt}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{i_1 d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{r}$$

$$= -\frac{di_1}{dt}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{r}\right) = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

で，同様に

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{di_2}{dt}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{d\boldsymbol{l}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_1}{r}\right) = -M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

だから $M_{12}=M_{21}$ となる．

相互インピーダンスや自己インピーダンスをもつ回路要素は交流回路には不可欠なもので，変圧器，高周波回路（たとえばラジオ）等に広く使われている．

4-3 磁気エネルギー

4-2-1 項で述べたようにコイルに電流が流れ始めれば自己インダクタンスによりその流れにさからう電流を流す起電力が起きる．そのためコイルに流れる電流はこの起電力にさからって流れるため仕事をしなければならない．このコイルの自己インダクタンスを L とし，電流 i が時間 dt の間に di だけ変化したとする．そのときの起電力は $\mathcal{E}=-Ldi/dt$ となる．また $i=dq/dt$ から

$$\mathcal{E}i = \mathcal{E}\frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

は仕事の時間変化率，つまり仕事率である．この電流のする仕事 W は

$$dW = -\mathcal{E}idt = Li\frac{di}{dt}dt = Lidi$$

$$\therefore \quad W = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2 \tag{4-9}$$

で与えられる．また i の電流が急にとまれば，上の逆の現象が起きるわけで，式 (4-9) は i の電流の流れている自己インダクタンス L をもつコイルの磁気エネルギーと考えることができる．これは q に帯電した容量 C のコンデンサーの電気エネルギーが

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

であることに対応している．

ソレノイドの場合を考えてみると，L は式 (4-7) より $L=\mu_0 n^2 lA$ で与えられるので，磁気エネルギーは

$$W=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 lAi^2=\frac{1}{2}\frac{(\mu_0 ni)^2 lA}{\mu_0}$$

となる．しかし $\mu_0 ni$ はソレノイド内の磁場だから

$$W=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}lA$$

で，また lA はソレノイドの体積だから，単位体積についての磁気エネルギー，つまり磁気エネルギー密度 U_B は

$$U_B=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \tag{4-10}$$

で与えられる．式 (4-10) は一般の場合でも正しく定常電流の分布する空間での磁気エネルギー密度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}$$

(式 (3-20)) も上の形で表わすことができる．

式 (4-10) ならびに式 (2-22) より電場と磁場のある空間での電磁エネルギー密度 U は

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \tag{4-11}$$

で与えられることがわかる．

4-4 *LC* 回 路

次に図 4-4 のようなコンデンサーとコイルから成り立つ回路を考えよう．この回路は理想的な回路で抵抗がまったくないものとする．コンデンサーの容量を C，コイルの自己インダクタンスを L，コンデンサーまたはコイルの電位差を V とする．最初コンデンサーは q に帯電し，電流は流れていないとす

る．このときの回路のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

ですべて電気エネルギーである．コンデンサーの電荷が，流れだすと電気エネルギーが減少するが，電流が流れるので，コイルの磁気エネルギー

$$\frac{1}{2}Li^2$$

が増加し，全エネルギーは変化しない．ある時間がたつとコンデンサーの帯電はゼロになりエネルギーは全部コイルの磁気エネルギーとなる．そして今度は電流が減少し，コンデンサーが帯電し，再び初期の状態にもどる．この過程はいつまでも繰り返される．これはバネについているおもりの運動の状態と同等で，この場合は位置と運動エネルギーが交互に最小値，最大値をとるが，いずれの場合も定期振動を示す．

この回路をもう少し数学的に解析しよう．コンデンサーでは $q=CV$ の関係があり，コイルでは $V=Ldi/dt$ である．またコンデンサーから電荷が減る，または増加する率が電流だから

$$i=-\frac{dq}{dt}=-C\frac{dV}{dt}$$

である．よって

$$V=-LC\frac{d^2V}{dt^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2V}{dt^2}+\left(\frac{1}{LC}\right)V=0 \qquad (4\text{-}12)$$

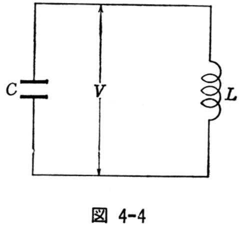


図 4-4

が得られる．ここで

$$V=A\cos\omega t \tag{4-13}$$

（A は定数）とおき式（4-12）に代入すると

$$-\omega^2-\frac{1}{LC}=0$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4-14}$$

が得られる．つまりこの回路の電圧 V は $1/\sqrt{LC}$ の角速度で余弦振動をする．いい換えれば周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$$

周波数

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

の振動電圧である．このような回路はラジオ等通信の発信機，受信機に広く使われている．また実際の回路には抵抗があるので，抵抗によるジュール熱でエネルギーが失われ，式（4-13）は $V=Ae^{-bt}\cos\omega t$（b は抵抗の値と L に依存する定数）となり，また ω も式（4-14）からずれる．そして電圧は振動しながら指数形に減衰し，いずれゼロとなる．

4-5 電 気 誘 導

磁気誘導が電場を誘導するなら，時間的に変化する電場により磁場が誘導されるのではないかと考えるのは当然である．この現象を，図 4-5 のような半径 R の d の間隔をもつ 2 枚の導体の円板でできているコンデンサーについて解析しよう．この電極間の電場 $\boldsymbol{E}$ が $d\boldsymbol{E}/dt$ の率で時間変化するとする．そのためにはコンデンサーの電荷は dq/dt と時間変化しなければならない．つまり電流 $i=dq/dt$ が電極に流れ込まなければならない．この現象を説明するため電場と磁場の強い関連性から，前記の Faraday の法則の $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ を逆にしたような法則がないかと考え

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} \propto \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

とおいてみる．この仮定が正しいかどうかは実験によって確かめることができ，その結果 MKSA 系では

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4-15}$$

の関係があることがわかった．しかし Ampere の法則より電流 i が流れればそのまわりに磁場 $\boldsymbol{B}$ が

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$$

とできるから，もっと一般的な場合を考えれば

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 i + \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}\right) \tag{4-16}$$

の関係が与えられる．上式の右辺の第２項のかっこの中の量は電場の時間的変化によって誘導された電流で，電束電流と呼ばれ，普通の電流と違って電荷の移動を伴わない．

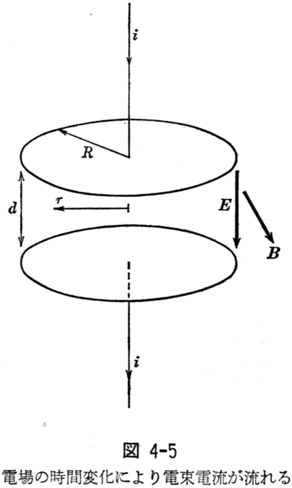


図 4-5
電場の時間変化により電束電流が流れる．

図 4-5 の例にもどって式 (4-16) の意味を考えてみよう．コンデンサーの荷電量が Q なら電極間の電場 E は Gauss の法則より

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

(A は電極の面積) で与えられ，電束

$$\Phi_E=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

となる．電極間で半径 r の円を図 4-5 のようにとり，その円周に誘導される磁場を考えると，式 (4-16) より，電極間では通常の電流が流れず，したがって第 1 項が落ちるから，

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=2\pi rB=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_E}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt}=\mu_0 i$$

となる．これより電極に電流 i が流れ込むことによって誘導される電束電流は電極に流れ込んだ電流に等しいことがわかった．また電線のまわりに発生する磁場と，電極間に誘導される磁場も等しく，電流，磁場ともに連続であることがわかる．

式 (4-16) の微分形は前と同様に求められ

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (4\text{-}17)$$

である．また $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=0$ より

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})=0$$

となり，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ を代入すると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

と前と同様に電荷密度と電流密度との間に連続の方程式が成り立ち，電荷が保存されることがわかる．これで式 (4-4) と式 (4-17) により電場と磁場が完全に統合された．

第 5 章

Maxwell の方程式と電磁波

5-1　Maxwell の方程式

今までの論議で電場と磁場の間の関連性が明らかになり，両者が統合され，電磁気学が形成されたことがわかった．そして今まで電場，磁場と別々に取り扱ってきたものは，実際は電磁場と呼ばれる場の成分であると考えることができるようになった．電磁場を完全に記述する一連の方程式は Maxwell の方程式と呼ばれ，いずれも今までに導入された式ばかりである．これはこれらの方程式が電磁場のすべての現象（静電場，電磁誘導等）を矛盾なく記述しなければならないことを考えれば当然である．

そこで Maxwell の方程式は下のように与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}&=0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}&=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}1)$$

Maxwell の方程式が電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ との間で対称的でないのは，電荷に対応する磁荷がないからである．

この章では Maxwell 方程式の物理的意義について考察することにしよう．一番簡単な例として電荷も電流もない真空の無限の空間（今後，自由空間と呼ぶ）での Maxwell の方程式の振舞いをとり上げよう．この場合式（5-1）は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0 \qquad (5\text{-}2\,\mathrm{a})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (5\text{-}2\,\mathrm{b})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (5\text{-}2\,\mathrm{c})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (5\text{-}2\,\mathrm{d})$$

となる．ここで電磁場は時間と空間，つまり座標，の関数で，なんらかの原因で発生したと考えよう．また時間と空間のことを“時空”と呼ぶことにする．式（5-2 d）を時間で偏微分し，式（5-2 a）を用いると

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})$$

$$\therefore\quad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E^2}{\partial t^2}=\nabla^2\boldsymbol{E} \qquad (5\text{-}3)$$

となる．これは電場の時空での振舞いを示す方程式で，これと同様な方程式は磁場 $\boldsymbol{B}$ についても得られる．

式（5-3）は $\boldsymbol{E}$ の各成分について成立するから

$$\left.\begin{aligned}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}\\ \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}\\ \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}4)$$

である．ここで話を簡単にするために電磁場は x 座標と時間 t にしか依存しないと仮定すると

$$\boldsymbol{E}=\hat{x}E_x(x,t)+\hat{y}E_y(x,t)+\hat{z}E_z(x,t) \tag{5-5 a}$$

$$\boldsymbol{B}=\hat{x}B_x(x,t)+\hat{y}B_y(x,t)+\hat{z}B_z(x,t) \tag{5-5 b}$$

となる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

より E_x は x に依存しないことがわかり，また式 (5-5 a), (5-5 b) を式 (5-2 d) に代入すれば E_x は t にも依存しないことがわかる．つまり E_x は定数で，静電場であり，この場合 $E_x=0$ とおいてもさしつかえない．式 (5-2 c), (5-2 b), (5-5 a), (5-5 b) より同様に $B_x=0$ とおける．これより $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ には y, z 成分しかないことがわかる．また式 (5-2 d) より

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

が得られるが，上の条件を入れれば

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t};\qquad \frac{\partial B_y}{\partial x}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

の関係が得られ，更に式 (5-2 b) より，同様に

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t};\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

が得られ，これらの式を整理すると

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}=-\frac{\partial B_z}{\partial x};\qquad \frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial B_y}{\partial x};\qquad \frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

となり E_y と B_z, E_z と B_y はおのおの独立な量でないことがわかる．しかし E_z と E_y, または B_z と B_y は独立で，その間に関係式がないから (E_y, B_z) と (E_z, B_y) と二つの独立した電磁場が可能で，前者の場合 $E_z=0$ とおくことができ，ゼロでない電磁場成分は E_y と B_z になり，電場と磁場が直交

していることがわかる．これは後者の場合も同様で，また電磁場の成分が一定の座標軸方向にない一般の場合でも，電場と磁場は直交する．この問題については後で偏光の話をするときにもう一度ふれる．

5-2 進行電磁波

式 (5-3) の解は波動を示すことが知られている．その解の一つに

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \tag{5-6}$$

がある．ここで E_y は電場の y 成分，E_0, ω, k は定数である（ω と k は独立ではない）．式 (5-6) は進行波を表わしている．ある一定の x では E_y は ω の角速度，つまり周波数 $f=\omega/2\pi$，周期 $T=1/f$ で単振動をする．またある一定の t では E_y は x の関数として図 5-1 のように余弦振動をする．振幅の山と山との距離はこの波の波長 λ で，式 (5-6) より $\lambda=2\pi/k$ で与えられる．式 (5-6) を

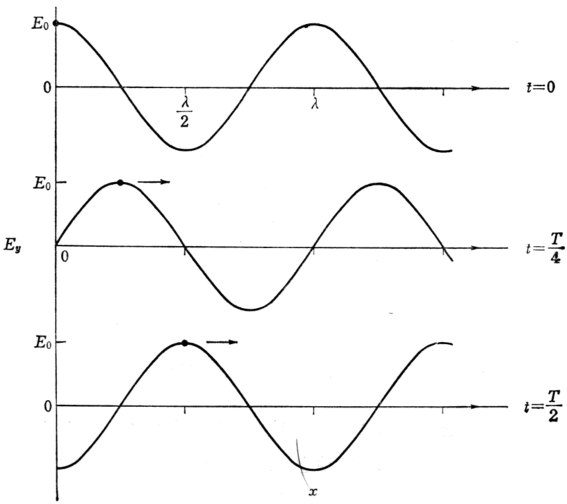


図 5-1　進行波の山の進行状態

$$E_y = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{k}{\omega} \cdot x \right)$$

と書きなおすと，$x=0$，$t=t'-(k/\omega)\cdot x'$ の時点での電場と，$x=x'$，$t=t'$ の時点の電場は同じ値をもつ．これを $(k/\omega)\cdot x$ という時間をかけて電場が x だけ正の方向に進行したと考えることができる．この進行速度 v_p は

$$v_p = \frac{x}{(k/\omega)\cdot x} = \frac{\omega}{k} \tag{5-7}$$

である．波の進行状態は $t=0$，$t=T/4$，$T/2$ と違った時刻での波の各 x での状態を示す図 5-1 を見れば明瞭である．この進行速度は進行波の位相速度と呼ばれ，後述の群速度と区別される．v_p は $T=1/f$，$\omega=2\pi f$ より $v_p=\lambda f=\lambda/T$ でも与えられる．

図 5-1 で明らかなように式 (5-6) では $t=0$，$x=0$ のときに $E_y=E_0$ で波の山がある．この山の動きを追うと，$t=T$，$x=\lambda$ の時点でふたたび $E_y=E_0$ となる．つまりこの山は位相速度 v_p で x の正の方向に進行する．これは E_y のどの値についてもいえることで，位相と呼ばれる式 (5-6) の余弦関数の変数 $\omega t - kx$ が一定の場合の t と x の関係は，$\phi=\omega t-kx$ とおくと

$$d\phi = \omega dt - k dx = 0$$

より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_p$$

で，v_p は位相が一定の点の進行速度であることがわかる．これが ω/k を"位相速度"と呼ぶ理由である．

さて式 (5-6) を式 (5-3) に代入すると

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = k^2 \tag{5-8}$$

が得られる．これを整理すると

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \frac{\omega}{k} = v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{5-9}$$

の関係が求められる．ε_0 と μ_0 の値を式 (5-9) に代入すると

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

と光速と同じ値が得られることに Maxwell は気がつき，電磁波の進行速度と光速が同じだという事実より，光は電磁波の一種であるという大発見をした．この発見によりそれまでなんの関係もないと思われた光学と電磁気学が統合され，光学的現象が電磁気学で解明できるようになった．

波動運動は一般に媒質が必要（たとえば音波の場合は空気等）だが，真空中で電磁波の進行が可能なのはもちろん電磁誘導のおかげで，電場が時間変化すれば磁場が誘導され，この磁場がまた電場を誘導し，電磁波が伝播するのだ．

磁場に関しても式（5-6）と同様に

$$B_z=B_0\cos(\omega t-kx)$$

とおき，これと式（5-6）を式（5-2 d）に代入すると

$$\mu_0\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t-kx)=B_0 k\sin(\omega t-kx)$$

$$\mu_0\varepsilon_0 E_0=\frac{k}{\omega}B_0$$

$$\therefore\quad E_0=\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=cB_0 \tag{5-10}$$

と E と B との関係が求められる．ここで c は光の速度である．

以上の論議は

$$E_y=E_0\cos(\omega t-kx)$$

$$B_z=\frac{E_0}{c}\cos(\omega t-kx)$$

という，いわゆる進行平面波を例にとってなされたが，これより得られた結論は他の電磁波の状態（たとえば定在波とか，電磁波の源から放射線上に進行する球面波等）にもあてはまる．そこで今までの結論を要約すると，電磁波の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ との間の関係は次のとおりである．

（1）　$E=cB$

（2）　$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$

（3）　$\hat{E}\times\hat{B}=\hat{v}$（$v$ は進行速度）

5-3 電磁波のエネルギー

式 (4-11) より電磁場の電磁エネルギー密度は

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

で与えられるので，電磁波も当然このエネルギーを伝播すると考えられる．そこで前節の進行平面波を例にとって電磁波のエネルギーの流れについて考察しよう．

図 5-2 のように電磁波の進行方向に垂直な面積 A，厚さ $\varDelta x$ をもつ直方体を考えよう．この直方体内のエネルギー W は

$$W=\frac{A\varDelta x}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

で，エネルギーの時間に対する変化率 $\partial W/\partial t$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&=\frac{A\varDelta x}{2}\left(2\,\varepsilon_0 E_y\frac{\partial E_y}{\partial t}+\frac{2}{\mu_0}B_z\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\\&=\frac{A\varDelta x}{\mu_0}\left(\varepsilon_0\mu_0 E_y\frac{\partial E_y}{\partial t}+B_z\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

である．しかし式 (5-2 b, d) より

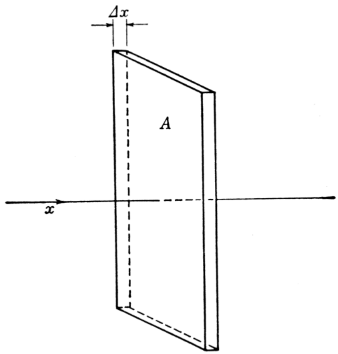


図 5-2

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{A\Delta x}{\mu_0}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial x}E_y-\frac{\partial E_y}{\partial x}B_z\right)$$

$$=-\frac{A\Delta x}{\mu_0}\frac{\partial(E_yB_z)}{\partial x} \tag{5-11}$$

となる．

$$\frac{\partial(E_yB_z)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{E_y(x+\Delta x,t)B_z(x+\Delta x,t)-E_y(x,t)B_z(x,t)}{\Delta x}\right]$$

だから，式（5-11）は

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\lim_{\Delta x\to 0}A\left[\frac{E_y(x,t)B_z(x,t)}{\mu_0}-\frac{E_y(x+\Delta x,t)B_z(x+\Delta x,t)}{\mu_0}\right] \tag{5-12}$$

となる．ここで

$$S_x(x,t)\equiv\frac{E_y(x,t)B_z(x,t)}{\mu_0} \tag{5-13}$$

と定義すると，式（5-12）は

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=\lim_{\Delta x\to 0}A[S_x(x,t)-S_x(x+\Delta x,t)]$$

となる．この式はエネルギーの保存法則を表わしている．また $\partial W/\partial t\cdot A$ は単位面積に対するエネルギーの変化率だから，$S_x(x,t)$ は x 方向への単位面積を単位時間に（x,t）の時空点で流れ通るエネルギーの量で，式（5-13）を一般化すれば

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{5-14}$$

となる．$\boldsymbol{S}$ は Poynting ベクトルと呼ばれ，$\boldsymbol{S}$ に垂直な平面の単位面積を単位時間に流れ通るエネルギーの量で単位は，W/m^2 である．式（5-6）で与えられる進行波の場合は

$$\boldsymbol{S}=\hat{x}\frac{1}{\mu_0 c}[E_0{}^2\cos^2(\omega t-kx)]$$

となる．$\boldsymbol{S}$ を一周期について時間平均すれば

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle_T=\hat{x}\frac{E_0{}^2}{\mu_0 c}\frac{\int_0^T\cos^2\omega t dt}{T}=\hat{x}\frac{E_0{}^2}{2\mu_0 c}$$

となる．ここで $\langle\ \rangle_T$ は一周期での時間平均を意味する．

次に Poynting ベクトルを前章の図 4-5 で示されたコンデンサーの場合について考えてみよう．電流 i がコンデンサーに流れ込むため，電極間の電場 E の時間変化率は

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{i}{\varepsilon_0 A}$$

で，そのため磁場

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

が電極間の側面に図 4-5 に示す方向に誘導される．$\boldsymbol{E}$ は上の電極から下に向かっているので

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

より，$\boldsymbol{S}$ は電極間の側面に垂直に向かっている．全側面に入る電磁エネルギーは

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{S}&=\frac{1}{\mu_0}E\cdot B\cdot 2\pi Rd\\&=\frac{E}{\mu_0}\mu_0 id=E\cdot\frac{i}{\varepsilon_0 A}\cdot\varepsilon_0 Ad=\varepsilon_0 E\frac{\partial E}{\partial t}Ad\end{aligned}$$

となる．しかしこれはコンデンサーが帯電するために蓄えられる電気エネルギー

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad$$

の時間変化率

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\varepsilon_0 E\frac{\partial E}{\partial t}\cdot Ad$$

である．磁気エネルギーは i が一定だから一定で変化しないから，コンデンサーが新しく得るエネルギーは電気エネルギーで，Poynting ベクトルの概念を使えば，このエネルギーはコンデンサーの側面より流れ込むと考えられる．

少し横道にそれたが，電磁波とは自由空間中を速度 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ で進行する電磁場で，そのエネルギーの流れは単位面積に対し，単位時間当り $\boldsymbol{S}$ である

ことがわかった.

5-4　電磁波の運動量

電磁波とは光速で移動する場で，この場はエネルギーをもつのだから当然運動エネルギーをもつと考えられる．したがって電磁波には運動量もあるはずだ．そこでこの節では進行平面電磁波により，$t=0$ のときに速度 $v=0$ でこの波の中におかれた正の電荷 q にかかる力より，この運動量を求めよう．

E_y, B_z の成分をもち x 方向に進行する電磁波による q に対する Lorentz 力は

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

だが，最初は $\boldsymbol{v}$ は小さく，$\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{E}$ だから電荷は波の進行方向と垂直な方向に E の周波数と同じ周波数で振動し，同時に $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の項により波の進行方向に力を受け少しずつ加速される．$\boldsymbol{v}$ をその成分にわけ

$$\boldsymbol{v}=\hat{x}v_x+\hat{y}v_y+\hat{z}v_z$$

とすると，上式は

$$\boldsymbol{F}=\hat{y}qE_y+\hat{x}qv_yB_z-\hat{y}qv_xB_z \tag{5-15}$$

となる．式 (5-15) を振動の一周期間で平均すると

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle_T=\hat{y}q\langle E_y\rangle_T-\hat{y}q\langle v_xB_z\rangle_T+\hat{x}q\langle v_yB_z\rangle_T$$

となる．そして

$$\langle E_y\rangle_T=\frac{\displaystyle\int_0^T E_0\cos\omega t dt}{T}=0$$

である．同様に

$$\langle B_z\rangle_T=0$$

である．また v_x は一周期間ではほとんど変化しないから定数と考えられ

$$\langle v_xB_z\rangle_T=v_x\langle B_z\rangle_T=0$$

となる．そこで

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle_T=\hat{x}q\langle v_yB_z\rangle_T \tag{5-16}$$

となり，力は進行方向へ働く．

またこの電磁波が電荷 q に対してする仕事は

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}$$

だから単位時間の仕事は

$$\frac{dW}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

となる．したがって

$$\frac{dW}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot(q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=qv_yE_y$$

$$\therefore\quad\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle_T=q\langle v_yE_y\rangle_T=q\langle v_ycB_z\rangle_T$$

である．$\boldsymbol{P}$ を電磁波の運動量とすれば，

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle_T=-\left\langle\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\right\rangle_T=\hat{x}q\langle v_yB_z\rangle_T=\hat{x}\left(\frac{1}{c}\right)\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle_T$$

となる．また W は波が粒子に対してなす仕事なので，波のエネルギーを E とすると，全系のエネルギー保存を仮定して，

$$-\left\langle\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\right\rangle_T=\hat{x}\left\langle\frac{d(W/c)}{dt}\right\rangle_T=\hat{x}\left\langle\frac{-d(E/c)}{dt}\right\rangle_T$$

となる．よって

$$\boldsymbol{P}=\hat{x}\left(\frac{E}{c}\right) \tag{5-17}$$

の関係が得られ，x 方向に進行する電磁平面波の運動量は進行方向に向かっていて，電磁波のエネルギーを光速 c で割った値をもつことがわかる．

このように電磁場はエネルギーと運動量をもつことができ，粒子のような振舞いをすることが明らかになり，場の概念が存在の一形態であることがますます明らかになってきた．

5-5 電磁波の偏光と角運動量

今まで例として使われてきた電磁波は E_y と B_z という成分をもっていた．しかし 5-1 節で述べたように E_z, B_y という成分をもつ電磁波もやはり x 方向へ進行する電磁波で，両者は互いに独立である．このように電場，磁場が一

定方向にしかない電磁波は，直線偏光しているといわれる．直線偏光の方向すなわち $\boldsymbol{E}$ の方向は必ずしも一定の座標軸上にある必要はなく，x 方向に進行する電磁波の場合は上の二つの波を位相差なく加え合わせた波も直線偏光している．ある点 x での一つの波を

$$\boldsymbol{E}_y=\hat{y}E_1\cos\omega t$$

とし，他の波を

$$\boldsymbol{E}_z=\hat{z}E_2\cos\omega t$$

とすれば，合成された波は

$$\boldsymbol{E}=(\hat{y}E_1+\hat{z}E_2)\cos\omega t \tag{5-18}$$

となる．この波の振幅は

$$E_0=\sqrt{E_1{}^2+E_2{}^2}$$

で，振動方向，つまり偏光方向は単位ベクトル

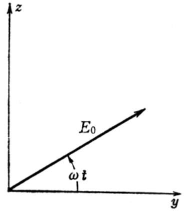
$$\hat{\varepsilon}=\hat{y}\frac{E_1}{E_0}+\hat{z}\frac{E_2}{E_0}$$

で与えられ，ともに時間に依存しない．そこでこの進行波は

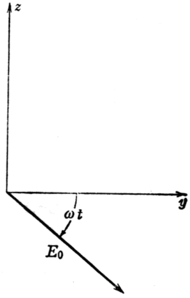
$$\boldsymbol{E}=\hat{\varepsilon}E_0\cos(\omega t-kx)$$

で表わされる．

二つの波の振動に時間的に位相差があると，合成された振幅は時間に依存し，特に $E_1=E_2$ で位相差が $\pm\pi/2$ の場合は電場と磁場のベクトルは ω の角



（a）　右巻き円偏光



（b）　左巻き円偏光

図 5-3

速度で進行方向を軸として回転する．この回転の方向は位相差の符号によって決まる．たとえば $\boldsymbol{E}$ がある x の点で

$$\boldsymbol{E}=\hat{y}E_0\cos\omega t+\hat{z}E_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{5-19}$$

で与えられれば

$$\boldsymbol{E}=\hat{y}E_0\cos\omega t+\hat{z}E_0\sin\omega t$$

となり図 5-3 (a) で矢印で示されたように $\boldsymbol{E}$ は x 軸（紙面に垂直で，正の方向は紙面から手前に出る方向）を中心にしてまわる．また

$$\boldsymbol{E}=\hat{y}E_0\cos\omega t+\hat{z}E_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{5-20}$$

の場合は図 5-3 (b) のように $\boldsymbol{E}$ はまわる．このいずれの電磁波も円偏光しているといわれ，式 (5-19) の場合を右巻き円偏光，式 (5-20) の場合を左巻き円偏光と呼ぶ．これは右手の親指を $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ の方向，つまり電磁波の進行方向にそろえると，他の指の方向が $\boldsymbol{E}$ の回転方向になるからである．左巻き円偏光の場合は左手を使うことはいうまでもない．

次に円偏光をもつ電磁波によって電荷 q が受けるトルクを考え，これが電磁波の角運動量につながることを示そう．式 (5-19) の例をとれば図 5-4 のように $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は x 軸上どの点でも ω の角速度で回転する．このような電磁波の中に電荷 q がおかれ，定常状態に達したら，回転する $\boldsymbol{E}$ により q も同じ角速度 ω で回転する．q は 5-4 節で述べたように x 方向にわずかな速度成分をもつが，これは無視してよい．図 5-4 のように q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，その速度を $\boldsymbol{v}$ とする．q にかかるトルク $\boldsymbol{\tau}$ は $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ だから

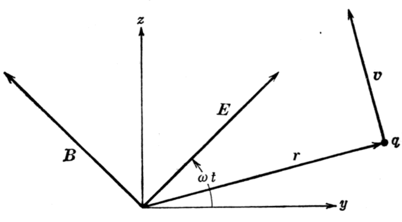


図 5-4
右巻き円偏光をもつ電磁波によって電荷 q がもつ速度が $\boldsymbol{v}$ である．

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{5-21}$$

である．$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は $+x$ の方向にあるから，$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ は図 5-4 より $-\boldsymbol{v}$ の方向にある．電磁場が一回転する間の $\boldsymbol{v}$ の平均値はゼロだから，一周期で平均したトルクは

$$\langle\boldsymbol{\tau}\rangle_T=q\langle\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}\rangle_T$$

となる．ここで両辺に ω を掛けると

$$\omega\langle\boldsymbol{\tau}\rangle_T=q\langle\omega\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}\rangle_T$$

だが，$\omega r=v$, $|\omega\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}|$（$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ とのなす角度が 90° だから正弦と余弦が入れ換わるため）より

$$\omega\langle\boldsymbol{\tau}\rangle_T=\hat{x}\langle q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\rangle_T=\hat{x}\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle_T$$

そこで

$$\langle\boldsymbol{\tau}\rangle_T=\frac{\hat{x}}{\omega}\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle_T \tag{5-22}$$

となる．角運動量を $\boldsymbol{J}$ で表わせば

$$\langle\boldsymbol{\tau}\rangle_T=-\left\langle\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}\right\rangle_T=\frac{\hat{x}}{\omega}\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle_T=\frac{\hat{x}}{\omega}\left\langle\frac{-dE}{dt}\right\rangle_T$$

となる．ここで E は電磁波のエネルギーである．負の符号のつく理由は，運動量の場合と同じである．そこで

$$\boldsymbol{J}=\hat{x}\frac{E}{\omega} \tag{5-23}$$

と円偏光した電磁波に角運動量があり，その方向は電磁波の進行方向か，またはその反対の方向であることがわかる．またその方向は円偏光の“巻き”によって決まり，右巻き偏光のときは進行方向，左巻き偏光のときはその逆となる．

このように電磁波が粒子のような性質をもっていることがますます明らかになった．また逆にいうならば，粒子にも波のような性質があるのではないかという問が当然出てくる．量子力学はまさにこの粒子と波の性質を統合した学問で，場の概念は量子力学では不可欠である．

5-6 電磁波による信号の伝播とその群速度

5-2 節で位相速度の概念を紹介した．位相速度は波の山または谷の速度で，電磁波の場合は直接観察できる量ではないが，波長と周波数が測定できれば $v_p = \lambda f$ より求められる．また物質中や，一定の断面をもつ導体でできた長い中空の管（導波管）の中を電磁波が進行すると，ω/k が一定の値をもたないので，"分散"という現象が起きる．この場 ω/k で表わせる位相速度が自由空間の光速 c より速くなることもある．これは一見後述の相対論に相反するように見える．しかし一定の周波数と振幅をもって進行する電磁波はなんの情報も伝えない．モールス信号でもわかるように，情報は電磁波の状態を変えなければならない．状態を変えるには振幅か，周波数を変えればよい．またエネルギーも振幅または周波数の変調がなければ一定の状態にあるので，エネルギーの変化も位相速度では伝播しない．相対論では情報は光速より速く伝わらないとされているから，位相速度が光速を越えても相対論と矛盾しない．

そこで信号を送る手段の一つとして少し周波数の違う波を二つ重ねて振幅を変調する例をとって，この変調が，つまり信号が，どんな速度で伝播するか調べよう．一つの電磁波の電場を

$$E_{y_1} = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

とし，他を

$$E_{y_2} = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

とすると，合成された電場 E_y は

$$E_y = E_0[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] \qquad (5\text{-}24)$$

である．式 (5-24) を

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\bar{k}=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

とおいて整理すると

$$E_y=2E_0\cos(\omega_m t-k_m x)\cos(\bar{\omega}t-\bar{k}x) \tag{5-25}$$

となる．図 5-5 にこのようにして合成された波のある時間での状態の一例を示す．この図で点線は山と山，谷と谷をつなぐ線で，振幅の変調を示し，この振幅の最大値（矢印で示されている）も時間とともに x 方向に進行し，この進行速度が変調，すなわち信号の伝わる速度となる．この速度は $(\omega_m t-k_m x)$ が一定の点の速度だから，これを v_g で表わせば

$$v_g=\frac{\omega_m}{k_m}=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \tag{5-26}$$

である．これは群速度と呼ばれ位相速度（図 5-5 の個々の山の速度）と区別される．$\omega_1\approx\omega_2$, $k_1\approx k_2$ なので式 (5-26) は

$$v_g=\frac{d\omega}{dk} \tag{5-27}$$

となり，これが群速度の定義である．分散のない今までの例ではどの ω と k についても $\omega=k/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=kc$ なので

$$v_p=\frac{\omega}{k}=c$$

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=c$$

$$\therefore\quad v_p=v_g$$

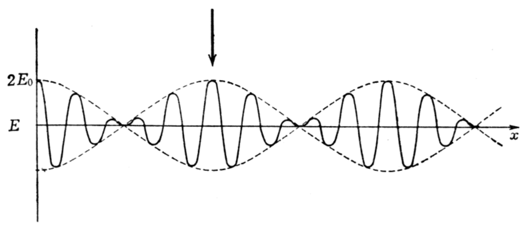


図 5-5

振幅変調は群速度で，個々の山は位相速度で伝わる．

と自由空間での電磁波の位相速度ならびに群速度はともに c である．しかし一定の断面をもつ導波管では

$$\omega^2=c^2k^2+\omega_c{}^2$$

という関係があり[†]（ω_c は定数），$\omega>\omega_c$ の場合

$$\left.\begin{aligned} v_p&=\frac{\omega}{k}=\sqrt{c^2+\frac{\omega_c{}^2}{k^2}} \\ v_g&=\frac{d\omega}{dk}=c^2\frac{k}{\omega}=c\left(\frac{c}{v_p}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

となる．式 (5-28) より

$$v_p>c;\qquad v_g<c$$

と位相速度は c を越えるが，情報を伝える群速度は光速以下であることがわかる．また

$$v_pv_g=c^2$$

という関係も得られる．

なお図 5-5 に示した状態は振幅変調が周期的であまり有意な変調ではない．実際に信号を送る際にはもっと不規則な変調をしなければならない．

---

† くわしくは高橋秀俊著 "電磁気学"（裳華房）を参照．

第 6 章

Maxwell の方程式と Lorentz 変換—電場と磁場の相対論的振舞い

6-1 Lorentz 変換

物理の法則はある座標系だけで正しいというものではなく，普遍的で，どの座標系でも成立しなければならない．これは物理の法則を表わす方程式がどの座標系でも同じ形をもつことを意味し，いい換えるならば，この方程式は座標変換の操作に対して不変でなければならない．座標変換の典型的な例として静止している座標系から，それに対して一定の速度で移動している座標系への変換を考えよう．この変換の一つには Galilei 変換と呼ばれるものがある．図 6-1 のように，静止している系を S とし，その系内の座標を (x, y, z) で表わす．また S に対して速度 v で $+x$ 方向に移動している系を S′ とし，その系内の座標を (x', y', z') で表わす．すると，(x, y, z) と (x', y', z') の間，ならびに両系での時間の間には次の関係がある．

$$x' = x - vt$$

$$\left.\begin{aligned} y'&=y \\ z'&=z \\ t'&=t \end{aligned}\right\} \tag{6-1}$$

この変換の特徴は S, S′ 系ともに同じ時間の基準をもつことである．

Newton による力学の方程式が式 (6-1) の変換に対して不変であることはよく知られている．たとえば力 F は $F=ma$ で与えられるが，質量 m は不変で，加速度 a は S 系では d^2x/dt^2 で与えられるから，S′ 系では式 (6-1) より

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2(x'+vt)}{dt'^2}=\frac{d}{dt'}\left(\frac{dx'}{dt'}+v\right)=\frac{d^2x'}{dt'^2}$$

と，S 系と同じ方程式で与えられる．したがって，この法則は Galilei 変換に対して不変である．

そこで Maxwell の方程式についても同様なことがいえるかどうか考えてみよう．話をやや簡単にするために Maxwell 方程式そのものではなく，それより得られる波動方程式，式 (5-3) が Galilei 変換に対してどのように振る舞うか調べよう．S 系での電場を

$$E_y(x, t)=E_0\cos(\omega t-kx) \tag{6-2}$$

とすると，式 (6-1) より，式 (6-2) を

$$\begin{aligned} E_y(x', t')&=E_0\cos[\omega t'-k(x'+vt')] \\ &=E_0\cos[(\omega-kv)t'-kx'] \end{aligned} \tag{6-3}$$

と書ける．式 (6-2) を式 (5-3) に代入すれば，前章で得られた

$$\omega^2=k^2c^2 \tag{6-4}$$

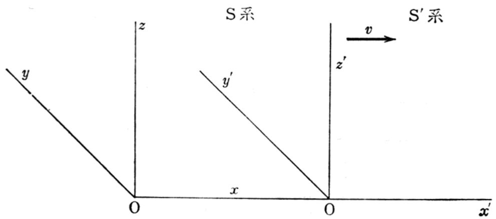


図 6-1　S 系と S′ 系との関係

の関係が求められる．しかし式 (5-3) は S′ 系では

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x', t')}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2 E_y(x', t')}{\partial x'^2}$$

となるから，式 (6-3) を代入すると，

$$(\omega-kv)^2=k^2c^2$$

の関係が得られ，これは明らかに式 (6-4) の関係と異なる．これは Galilei 変換の下では Maxwell の方程式が不変でないことを意味する．ここでは特定の E_y を例にとって Maxwell の方程式の Galilei 変換の下での非不変性を示した．しかし，一般に $\phi(x, y, z, t)$ という関数があれば

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$

が，Galilei 変換の下で不変でないことは，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

の関係（他の変数，y，z，t についても同様な関係がある）と式 (6-1) より

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}$$

だが

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\neq\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$$

なので証明できる．

Maxwell の方程式が Galilei 変換の下で不変でないことは，式 (5-3) の $\mu_0\varepsilon_0=1/c^2$ を定数とみなすかぎり当然である．なぜならば電磁波の速度が c である座標系を S 系とすれば，S′ 系での速度は式 (6-1) より $v'=c-v$ となり，電磁波，つまり光の速度は，それを測定する座標系によって違ってくる．そこで Galilei 変換も，Maxwell の方程式も，ともに正しいとするには，電磁波が $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ の速度で進行する特別な唯一の系を認めなければならない．しかしその場合には，その系に対して移動する系での光速は c と違った値をもつはずだが，これは有名な 1887 年に行なわれた Michelson と Morley の実験により否定され，光速はどの座標系でも同じで，c であることがわかっ

た．この実験事実と，光速が c である特別な座標系の存在を両立させるために，Lorentz と，（また Lorentz とは独自に）Fitzgerald はこの系に対して，速度 $v<c$ で移動する物体は移動方向に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ の割合で収縮するという理論を提案した．これはまことに面白い発想ではあったが，"一時しのぎ"的な解決策で，根本的な解決策ではなかった（事実約 30 年後に Kennedy と Thorndike の実験によりこの理論の不当性が証明された）．

ちょうどその頃 Einstein は Maxwell の方程式の Galilei 変換下での非不変性の問題の解決策として，有名な特殊相対論を提案した．これはまことに画期的な理論で，物理学，天文学の将来を大きく変え，現代物理学の大布石となった．Einstein の理論は次の二つの根本的な原理の上に成り立っている．

（1）　物理の法則はどの座標系でも不変で，特別な座標系（つまり実験的にそうだと認知できる）はない．

（2）　自由空間での光速はいかなる座標系で測定しても同じ値 c をもつ．

この二つの原理より Einstein は図 6-1 のような S 系と S′ 系での座標と時間の関係を求めた．これは

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x-vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5)$$

で，ここで

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta=\frac{v}{c}$$

である．これらの変換式は，同様な変換式をやや違った形で，また違った意味をもたせて Lorentz が提案したことから，Lorentz 変換と呼ばれる．Lorentz 変換と Galilei 変換との大きな違いは，時間の取扱い方である．信号が有限の速度で伝播するため，一つの事象を二つの系から観測した場合，"同時性"という考えが無意味となり，Galilei 変換の $t'=t$ は $v\ll c$ の場合の近似であって，厳密には不当である．

Lorentz 変換の下では Maxwell の方程式は当然不変であるが，今度は

Newton の力学に問題が生じる．しかし，これは Newton の力学を修正することにより解決し，相対論的力学が生まれ，Newton の力学はその $v \ll c$ の場合の近似であることが知られている．

6-2 速度，運動量，エネルギー，力の Lorentz 変換

これから先の話を理解するには，運動量等力学的量の Lorentz 変換を知る必要がある．そこでこの節でこれらの変換についてごく簡単に述べる．†

S 系での速度 u と，その S′ 系での速度 u' との関係は式 (6–5) より，各成分につき

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(v)(dx'+vdt')}{\gamma(v)\left(dt'+\dfrac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{u_x'+v}{1+u_x'\dfrac{u}{c^2}} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'}{\gamma(v)\left(1+u_x'\dfrac{v}{c^2}\right)} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u_z'}{\gamma(v)\left(1+u_x'\dfrac{v}{c^2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{6–6}$$

と求められる．ここで

$$\gamma(v) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

で，v は S′ 系の S 系に対する速度である．

静止しているときの質量が m_0 の物体が速度 u で S 系で動いているとき，その物体の運動量 P の各成分とエネルギー E は

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \gamma(u)m_0u_x \\ P_y &= \gamma(u)m_0u_y \\ P_z &= \gamma(u)m_0u_z \\ E &= \gamma(u)m_0c^2 \end{aligned}\right\} \tag{6–7}$$

である．同様に S′ 系では

† くわしくはこのシリーズの藤井保憲著“時空と重力”（産業図書）等を参照．

$$\left.\begin{aligned} P_x{}' &= \gamma(u')m_0 u_x{}' \\ P_y{}' &= \gamma(u')m_0 u_y{}' \\ P_z{}' &= \gamma(u')m_0 u_z{}' \\ E &= \gamma(u')m_0 c^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-8}$$

である．式 (6-6)，(6-7)，(6-8) より P，E と P'，E' の関係を求めることができる．そのためにはまず $\gamma(u)$ と $\gamma(u')$ との関係を求める必要があり，計算の詳細ははぶくが

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - u_x \frac{v}{c^2}\right) \tag{6-9}$$

が得られる．式 (6-9) と式 (6-7)，(6-8) より

$$\left.\begin{aligned} P_x{}' &= \gamma(v)\left(P_x - v\frac{E}{c^2}\right) \\ P_y{}' &= P_y \\ P_z{}' &= P_z \\ E' &= \gamma(v)(E - vP_x) \end{aligned}\right\} \tag{6-10}$$

の関係が得られ，これが運動量とエネルギーの Lorentz 変換の式である．式 (6-5) と式 (6-10) を比較すると P_x，P_y，P_z と E/c^2 は x，y，z と t と同じ形で Lorentz 変換することがわかる．

次に力の Lorentz 変換を考えよう．運動量を $\boldsymbol{P}$ とすると，$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{P}/dt$ より

$$F_x = \frac{dP_x}{dt}; \qquad F_x{}' = \frac{dP_x{}'}{dt'}$$

となる．そこで式 (6-5)，(6-10) より

$$F_x{}' = \frac{dP_x{}'}{dt'} = \frac{dP_x{}'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\gamma\left(\dfrac{dP_x}{dt} - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dE}{dt}\right)}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}\right)}$$

で，ここで $\gamma = \gamma(v)$ である．上式より

$$F_x{}' = \frac{F_x - \dfrac{v}{c^2}\left(\dfrac{dE}{dt}\right)}{1 - u_x\dfrac{v}{c^2}} \tag{6-11}$$

が得られる．しかし

$$E^2=(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P})c^2+m_0{}^2c^4=m^2c^4$$

より

$$E\frac{dE}{dt}=\boldsymbol{P}\cdot\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}c^2=c^2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}=mc^2\frac{dE}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{dE}{dt}=\frac{\boldsymbol{P}}{m}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F} \tag{6-12}$$

となる．式 (6-12) を式 (6-11) に代入すると

$$F_x{}'=\frac{F_x-\left(\dfrac{v}{c^2}\right)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{1-u_x\dfrac{v}{c^2}} \tag{6-13}$$

となる．同様に

$$\left.\begin{aligned} F_y{}'&=\frac{F_y}{\gamma\left(1-u_x\dfrac{v}{c^2}\right)}\\ F_z{}'&=\frac{F_z}{\gamma\left(1-u_x\dfrac{v}{c^2}\right)}\end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

が得られる．力を受ける物体が S 系で静止している場合，つまり $\boldsymbol{u}=0$ の場合は式 (6-13)，(6-14) より

$$\left.\begin{aligned} F_x{}'&=F_x\\ F_y{}'&=\frac{F_y}{\gamma}\\ F_z{}'&=\frac{F_z}{\gamma}\end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

が求められ，S′ 系で物体が静止している場合，つまり $\boldsymbol{u}'=0$ の場合は

$$\left.\begin{aligned} F_x{}'&=F_x\\ F_y{}'&=\gamma F_y\\ F_z{}'&=\gamma F_z\end{aligned}\right\} \tag{6-16}$$

の関係がある．

次に特殊相対論の見地より電場と磁場の関係を考察し，電磁気学は必然的に

相対論的な学問で，そのため Newton の力学のように相対論ができた後も修正の必要がなかったことを理解しよう．

6-3　電場と磁場の相互依存性

磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で $\boldsymbol{v}$ の速度で動いている電荷 q に働く力は

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

だが，この $\boldsymbol{v}$ がどの座標系に対しての速度かで事情が変わってくる．そこで図 6-2 のような S と S′ 系を考えよう．S 系では断面積 A をもつ電線が静止状態にあり，電流 i が流れている．電流 i は負の電荷をもつ電子の流れだから，負の電荷密度を ρ_- とし，その速度を v とすると

$$i=\rho_- vA$$

となる．電線は全体としては帯電していないから，正の電荷密度 ρ_+ は $\rho_+=-\rho_-$ で与えられる．また正の電荷は電線の中では不動であることが知られているので，ρ_+ は S 系では静止している．図 6-2 のように S 系での電線の長さを L とし，電線の軸から距離 r の所に電荷 q が ρ_- と同じ速度 v で電線に平行に動いているとする．電流の方向は ρ_- の流れの方向の逆だから，i による磁場 B は紙面に上から入る方向にある．そこで q に働く力 F は，$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ より，q が正なら電線から遠ざかる方向にある．くわしくは

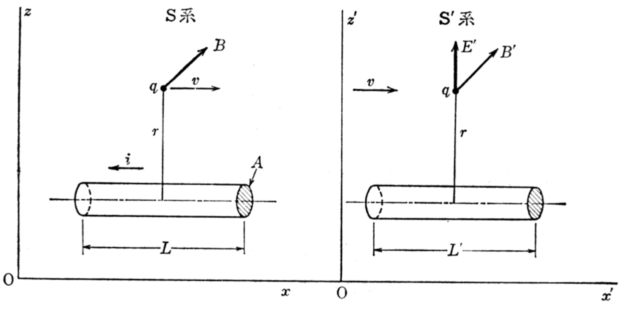


図 6-2

S 系では磁場 B しか存在しないが，S′ 系では磁場 B' とほかに電場 E' も観測される．

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\rho_- vA \\ F&=qvB=\frac{\mu_0 q}{2\pi}\frac{\rho_- v^2 A}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{–}17)$$

である．

次に電荷 q が静止している座標でこの現象がどのように観察されるか考えよう．S′ 系は S 系に対して $\boldsymbol{v}$ の速度で移動する．負の電荷はこの系では静止しているが，正の電荷は $-\boldsymbol{v}$ の速度で移動する．S′ 系での量を “′” をつけて表わすと，電線の長さは

$$L'=L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{L}{\gamma}$$

となるが，$A'=A$ と断面積は変わらない．

S 系では正の電荷が静止しているから，この電線に含まれる正の電荷量 Q_+ は

$$Q_+=\rho_+ LA$$

である．ここでは証明しないが電荷はどの系でも不変なので†

$$Q_+=\rho_+ LA=\rho_+' L'A$$

$$\rho_+=\frac{\rho_+'}{\gamma}$$

$$\therefore\quad \rho_+'=\gamma\rho_+ \qquad (6\text{–}18)$$

となる．S′ 系では負の電荷が静止しているから，上の場合の逆で

$$\rho_-'=\frac{\rho_-}{\gamma} \qquad (6\text{–}19)$$

となる．また S 系では電荷密度 ρ は $\rho=\rho_+ + \rho_- = 0$ であるが，S′ 系では

$$\rho'=\rho_+' + \rho_-' = \gamma\rho_+ + \frac{\rho_-}{\gamma} = \rho_+\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)=\rho_+\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma}\right)\neq 0 \qquad (6\text{–}20)$$

と，速度 $-\boldsymbol{v}$ で移動している電線の電荷量は相対論的効果によりゼロではなく，式 (6–20) で与えられる．そのため電荷 q の位置では，正の電荷の移動による磁場 B' のみならず，電場 E'

† 水素原子は電子が陽子のまわりを回転しているにもかかわらず，電気的に中性である．これは電荷量がその運動に依存しないことを示す．

$$E'=\frac{\rho_+(\gamma^2-1)A}{2\pi\varepsilon_0\gamma r'}=\frac{\rho_+(\gamma^2-1)A}{2\pi\varepsilon_0\gamma r}$$

も存在する．したがって静止している q には力 F'

$$F'=\frac{q\rho_+(\gamma^2-1)A}{2\pi\varepsilon_0\gamma r} \qquad (6\text{-}21)$$

が働く．そしてこの力は電線から遠ざかる方向に働く．$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ を式 (6-21) に代入すると

$$F'=\frac{q\rho_+A}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

となる．ここで $1/c^2=\mu_0\varepsilon_0$ であることを思い出すと

$$F'=\left(\frac{q\rho_+Av^2\mu_0}{2\pi r}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (6\text{-}22)$$

となる．しかし式 (6-22) のかっこの中の量は，$\rho_+=-\rho_-$ であることを考えれば，式 (6-17) で表わされる S 系での v の速度で動く q に対する磁場 B による力と同じ大きさをもっていることがわかる．そこで

$$F'=\gamma F \qquad (6\text{-}23)$$

という関係が得られる．しかし式 (6-23) は式 (6-16) より，S′ 系で静止している物体に働く力の，座標系の移動方向に垂直な成分の S と S′ 系との間の変換式であるから，S 系で q に働く磁場 B による力と，S′ 系で電場により働く Coulomb 力とが同じものであることがわかる．つまり一つの系では純粋な磁場も，他の系より観察すれば磁場と電場に見える．これから電場，磁場という区別は一義的にできるものではなく，両方を統合した電磁場という概念の方がずっと有意であることがわかる．

上記の電線の場合 $A=1\,\mathrm{mm}^2$，$i=10\,\mathrm{A}$ とすると，$v\approx6\times10^{-4}\,\mathrm{m/sec}$ と電子の速度，そして S′ 系の S 系に対する速度は非常に小さい．これを $\beta=v/c$ にすると $\beta\approx2\times10^{-12}$ で，非常に小さい．これは電磁気学が基本的に相対論的で，Newton の力学のような非相対論的力学に対応する，非相対論的電磁気学がないことを意味する．

6-4　電荷密度と電流密度の Lorentz 変換

ある座標系で静止している電荷密度を ρ_0 とする．この系では電流密度はゼロである．次にこの電荷密度が u の速度で移動している系では，電荷密度 ρ は式 (6-18) より

$$\rho=\gamma(u)\rho_0 \tag{6-24}$$

となり，電流密度 j は

$$j=\gamma(u)\rho_0 u \tag{6-25}$$

で与えられる．式 (6-24), (6-25) と式 (6-7) を比べると ρ と E, j と P が同じ形で与えられることがわかり，ただちに式 (6-10) より次の Lorentz 変換の式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} j_x'&=\gamma(v)(j_x-v\rho)\\ j_y'&=j_y\\ j_z'&=j_z\\ \rho'&=\gamma(v)\left(\rho-\frac{v}{c^2}j_x\right) \end{aligned}\right\} \tag{6-26}$$

式 (6-26) より j_x, j_y, j_z, ρ は x, y, z, t, または P_x, P_y, P_z, $E/c^2=m$ と同じ形で Lorentz 変換することがわかる．このように相対論では 3 次元のベクトルの性質をもつ空間的量と，1 次元の時間的量から成り立つ量（座標と時間，運動量とエネルギー，電流密度と電荷密度等），いわゆる 4 元ベクトルの概念が広く取り入れられている．この場合はベクトル演算も 4 次元に拡張される．電磁気学でも前出の電流密度のほかにベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を一緒にした 4 次元ポテンシャルの概念も導入された†.

6-5　電磁場の Lorentz 変換

Maxwell の方程式は Lorentz 変換の下では不変だから，S 系では

† くわしくはファインマン，レイトン，サンズ著，戸田盛和訳 "ファインマン物理学IV"，(岩波書店) を参照.

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{6-27}$$

で，S′ 系でも “′” をつけた量で同じ方程式が成り立つ．そこで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

について考えよう．これらを成分にわけると

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\tag{6-28 a}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\tag{6-28 b}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\tag{6-28 c}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\tag{6-28 d}$$

となり，S′ 系では

$$\frac{\partial B_x'}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0\tag{6-29 a}$$

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x'}{\partial t'}\tag{6-29 b}$$

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B_y'}{\partial t'}\tag{6-29 c}$$

$$\frac{\partial E_y'}{\partial x'}-\frac{\partial E_x'}{\partial y'}=-\frac{\partial B_z'}{\partial t'}\tag{6-29 d}$$

の関係が成り立つ．

また 6-1 節で述べたとおり

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}$$

である（y, z, t についても同様）．上式と式（6-5）より

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma; \qquad \frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial t'}{\partial x}=-\gamma\frac{v}{c^2}$$

だから

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}&=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\\
\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y'}\\
\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z'}\\
\frac{\partial}{\partial t}&=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6-30}$$

となる．式（6-30）を式（6-28 c）に代入すると

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right)=-\gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}-v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}(\gamma E_z+\gamma vB_y)=-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma B_y+\gamma\frac{v}{c^2}E_z\right)$$

となる．しかし，これは式（6-29 c）と同形でなければならないから

$$\left.\begin{aligned}
E_x'&=E_x\\
E_z'&=\gamma(E_z+vB_y)\\
B_y'&=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6-31}$$

が得られる．

また式（6-28 d）に式（6-30）を代入すると

$$\gamma\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\frac{\partial B_z}{\partial t'}+\gamma v\frac{\partial B_z}{\partial x'}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x'}(\gamma E_y-\gamma vB_z)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma B_z-\gamma\frac{v}{c^2}E_y\right)$$

となり，この式が式（6-29 d）と同形でなくてはならないから

$$\left.\begin{aligned}
E_y'&=\gamma(E_y-vB_z)\\
B_z'&=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6-32}$$

が求められる．

更に式（6–28 a）に式（6–30）を代入すると

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'}=0 \qquad (6\text{–}33)$$

となる．また式（6–31），（6–32）より

$$B_y=\gamma\left(B_y{}'-\frac{v}{c^2}E_z{}'\right)$$

$$B_z=\gamma\left(B_z{}'+\frac{v}{c^2}E_y{}'\right)$$

なので，これを式（6–33）に代入すると

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial B_y{}'}{\partial y'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z{}'}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial B_z{}'}{\partial z'}+\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_y{}'}{\partial z'}=0$$

となる．上式を整理すると

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial B_y{}'}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial B_z{}'}{\partial z'}-\gamma\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial E_z{}'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y{}'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)=0$$

で，この式が成立するには，式（6–29 a, b）より

$$B_x{}'=B_x$$

でなければならない．

今までの変換式を全部まとめると

$$\left.\begin{aligned}
E_x{}'&=E_x\\
E_y{}'&=\gamma(E_y-vB_z)\\
E_z{}'&=\gamma(E_z+vB_y)\\
B_x{}'&=B_x\\
B_y{}'&=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)\\
B_z{}'&=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{–}34)$$

となる．上式より S, S′ 系の相対速度 v と平行な方向（x 方向）にある電磁場の成分は両系で同じで，これらの成分を $\boldsymbol{E}_{//}$, $\boldsymbol{B}_{//}$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}'_{//}&=\boldsymbol{E}_{//}\\
\boldsymbol{B}'_{//}&=\boldsymbol{B}_{//}
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{–}35)$$

となる．しかし v と垂直な方向，つまり $\boldsymbol{E}_\perp$，$\boldsymbol{B}_\perp$ は式 (6-34) より

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\perp{}'&=\gamma[\boldsymbol{E}_\perp+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_\perp]\\ \boldsymbol{B}_\perp{}'&=\gamma\left[\boldsymbol{B}_\perp-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_\perp\right]\end{aligned}\right\}\tag{6-36}$$

または

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\perp&=\gamma[\boldsymbol{E}_\perp{}'-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}')_\perp]\\ \boldsymbol{B}_\perp&=\gamma\left[\boldsymbol{B}_\perp{}'+\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}'\right)_\perp\right]\end{aligned}\right\}\tag{6-37}$$

の関係が求められる．6-3 節で述べた電場と磁場の相互依存性は式 (6-37) を見れば明白である．この場合 $\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_\perp$ であるから，S′ 系では

$$\boldsymbol{E}_\perp{}'=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}')_\perp$$

という電場があることがわかる．

第 7 章

移動する電荷による電磁場—電磁輻射

第5章で Maxwell の方程式と電磁波を論議したときに，時間的に変化する電磁場がなんらかの方法でできることを仮定した．そして Maxwell の方程式の解を，電荷も電流も存在しない自由空間で求めた．そこでこの章では，どのようにして時間に依存する電磁場ができるかを検討しよう．

7-1　一定の速度で移動する電荷による電磁場

時間に対して変化する電磁場の話を始める前に，まず一定速度で移動している電荷がどのような電磁場をつくるかを，前章の相対論を考慮して考えてみよう．前出の S と S′ 系を考え，S 系で電荷 q が一定速度 v で $+x$ の方向に移動しているとする．S′ 系が S 系に対して v の速度で $+x$ 方向に移動していれば，S′ 系では電荷 q は静止している．したがって S′ 系では磁場 $\boldsymbol{B}'=0$ で，q より r' 離れた点での電場 $\boldsymbol{E}'$ は，Coulomb の法則より，

$$\boldsymbol{E}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}'}{r'^2} \tag{7-1}$$

で与えられる．また

$$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2 \tag{7-2}$$

であるが，式 (6-5) より，S 系の座標で表わせば，

$$r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}=[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{1/2}$$

である．ここで $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ である．

また S′ 系での電場の x', y', z' 成分は

$$E_x'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3};\qquad E_y'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3};\qquad E_z'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}$$

で与えられる．式 (6-34) より，これらの成分の S 系での値は

$$\left.\begin{aligned} E_x&=E_x'=\frac{q\gamma(x-vt)}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\\ E_y&=\gamma E_y'=\frac{q\gamma y}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\\ E_z&=\gamma E_z'=\frac{q\gamma z}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \tag{7-3}$$

となる．また式 (6-35), (6-37) より

$$\boldsymbol{B}'_{/\!/}=\boldsymbol{B}_{/\!/}=0$$

$$\boldsymbol{B}_\perp'=\gamma\left[\boldsymbol{B}_\perp-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_\perp\right]=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{B}_\perp=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_\perp \tag{7-4}$$

となる．

v は x の方向にあるから，式 (7-4) より

$$\left.\begin{aligned} B_x&=0\\ B_y&=-\frac{vE_z}{c^2}\\ B_z&=\frac{vE_y}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

が得られる．

式 (7-3) で時刻 $t=0$ のときに q が S 系の原点にあるから（つまり，S と

S′ 系が重なっているから)，式 (7-3) は

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{q\gamma x}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{q\gamma y}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{q\gamma z}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \tag{7-6}$$

となり，これをベクトルの形で表わせば

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{7-7}$$

となる．$t=0$ 以外の時間での電場も式 (7-7) と同じだが，ただ vt だけ右 (x 軸上) へずれる．

図 7-1 のように S 系で点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と原点を結ぶベクトル $\boldsymbol{r}$ と x 軸がなす角度を θ とすると，

$$x = r\cos\theta$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}; \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

より，式 (7-7) は

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\gamma\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0\gamma^3\left(x^2+\dfrac{y^2+z^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} = \frac{q(1-\beta^2)\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0[r^2-\beta^2(y^2+z^2)]^{3/2}}$$

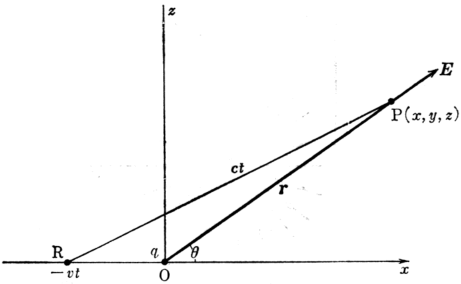


図 7-1　S 系で v の速度で移動する電荷 q とその遅延点 R

$$=\frac{q(1-\beta^2)\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{7-8}$$

となり，電場の方向は電荷 q を中心とする放射線上にそっていることがわかる．また $v \ll c$ の場合は $\beta \approx 0$ より式 (7-8) は

$$\boldsymbol{E}=\frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

と Coulomb の式にもどる．式 (7-8) で与えられる電場を図形化すると，図 7-2 のようになり，電荷の移動速度が速くなるにつれ，移動方向に垂直な方向の成分が増すことがわかる．

今までの結果は Lorentz 変換に対しての電荷の不変性，つまり Gauss の法則の不変性から求めることもできる．S′ 系で図 7-3 (a) のように電荷を中心に等方的に出る電場を，図にあるような底面が S′ 系の移動方向に垂直で，長さ L' の円柱でかこむ．この円柱の底面積は $y'=y$, $z'=z$ より S 系でも変わらないが，長さは図 7-3 (b) のように，$L=L'\sqrt{1-\beta^2}$ と短くなる．しかし Gauss の面積分の値は S 系でも，S′ 系でも不変だから，

$$\int_{S}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S'}\boldsymbol{E}'\cdot d\boldsymbol{S}'=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

である．だが底面を通る電束は S, S′ 系ともに等しくなければならず，両系での底面積が等しいことから $E_x=E_x'$ となる．だが側面積は S 系では S′ 系の $1/\gamma$ になるから，移動方向に垂直な電場 $E_\perp$ は

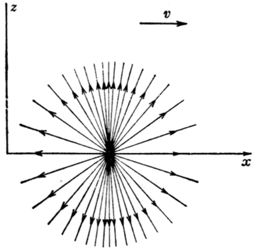


図 7-2　S 系で速度 v で移動する電荷 q による電場

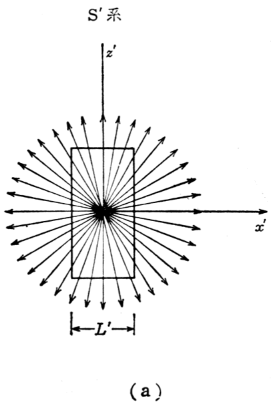
$$E_{\perp}=\gamma E_{\perp}'$$

で与えられる．

図 7-1 のように $t=0$ のときに q が原点 O にあり，そのとき，点 P で電場 E を観測するとする．しかし v の速度で移動する q による電磁場は光速度 c で伝播するから，q が O 点に到達したという事実を P 点でそのときに知ることはできない．R 点を q の $t=0$ より前の位置とすると，R 点を q が通ったという情報が P にとどくには，そのときから

$$t=\frac{\overline{\mathrm{RP}}}{c}$$

の時間がかかる．ここで $\overline{\mathrm{RP}}$ は R 点と P 点の間の距離，c は光速である．そしてこの時間で q が R 点から O 点に移動すれば，つまり $vt=\overline{\mathrm{RO}}$ ならば，q が O を通る時点で P で観測される電場は，q が R にあったときの電場である．そのため R 点は P 点に対して，O 点の遅延点と呼ばれる．しかし電場の方向は q の現在の位置（この場合 $t=0$）と観測点とを結ぶ方向にあることを忘れてはならない．



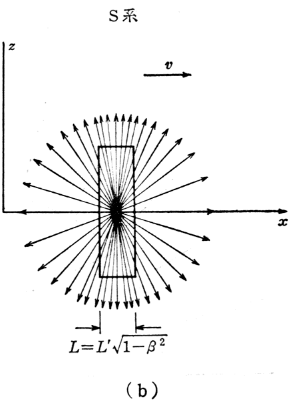


図 7-3

S 系では円柱形の Gauss 面の長さが短くなる．

7-2　加速された電荷による電磁場

前節では一定の速度で移動する定常状態にある電荷による電磁場を求めた．そこでこの節では電荷が静止状態から定速度で移動する定常状態になるまでの過渡期，つまり電荷が加速されている状態での電磁場を考えよう．電荷 q は S 系の原点で $t=0$ のときまでずっと静止していたとする．その間の電場は静電場で Coulomb の法則で与えられる．$t=0$ のときに q が突然一定の加速度 a で $+x$ の方向に非常に短い時間加速されたとする．この時間を $\varDelta t$ とすれば，加速が終わったあと q は定速度 $v=a\varDelta t$ で $+x$ の方向に移動し，前節で述べた状態になる．そこで，この加速されたという情報がどのように伝播するかを考えて，加速された電荷による電磁場を求めよう．

そのために時刻が $t=t_0$ のときの状態を考えよう．t_0 が十分に大きいとすると，$t_0 \gg \varDelta t$ で $t_0 \approx t_0-\varDelta t$ となる．この場合は q は時刻 t_0 のとき，図 7-4 a のように，$x=vt_0$ の位置にあると考えてよい．$\varDelta t \approx 0$ だから，q が加速されたという情報は，時刻 t_0 のときに，原点を中心とする半径 ct_0 の球面上にと

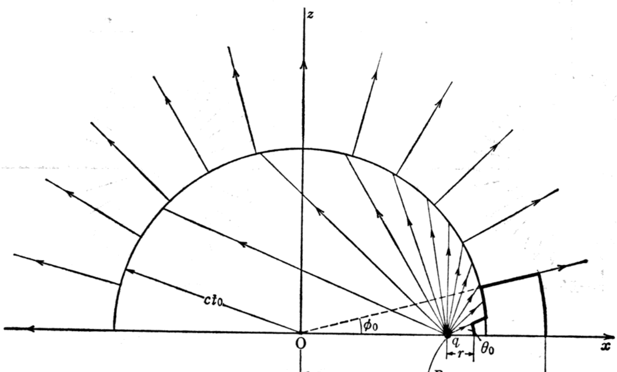


図 7-4 a　短時間加速された電荷 q による電場
太い線が Gauss 面の境界を示す．

どく．この球の内部に観測点があれば，その情報はすでに通りすぎてしまったし，外部の点にはまだとどいていない．したがって図 7-4 a の半円の外部の電気力線は，加速情報の伝わる前，つまり q が原点にあったときの電場を示すので，0 より放射線上に等方的に広がる．また半円の内部では $x=vt_0$ にある q より式 (7-8) で与えられる，一定速度 v で移動する電荷の電場を示す電気力線が $x=vt_0$ の点より広がる．また Gauss の法則が成り立たなければならないから，電気力線は連続でなければならない．したがって，円の内部と外部の電気力線は円周にそった電気力線によって結ばれる．つまり加速されたという情報は図 7-4 a のように，電気力線の折れ目として伝わる．またこのことから，加速された電荷によって生じる電場は原点から広がる放射線に対して垂直方向にあることがわかり，情報[†] が放射線上に電磁波として伝わることが容易にわかるだろう．同時に定常状態の電荷による電磁場では情報が伝わらないこともわかるであろう．

次に加速された電荷による電場を具体的に求め，図 7-4 a の内部の電気力線が外部のどの電気力線に結びつくか調べてみよう．x 軸と θ_0 の角をなす内部の電気力線と，ϕ_0 の角をなす外部の電気力線が続いているとする．次に電気力線を $x=vt_0$ を中心にもつ半径 $r<ct_0$ の円弧と，O を中心とする半径 $R>ct_0$ の円弧を両端にもつ，図 7-4 a で太い線で示された境界線でかこむ．更に

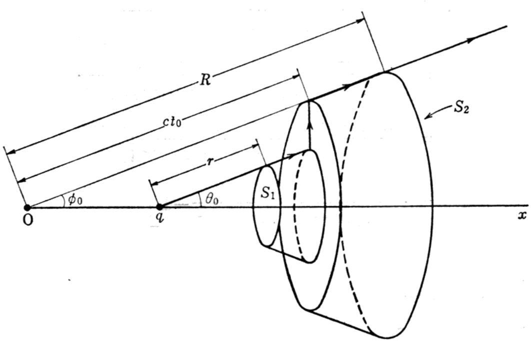


図 7-4 b　図 7-4 a の Gauss 面の境界線を x 軸を中心にして回転させてできる表面

---

† つまり電磁場の状態の変化．

この境界線を x 軸を中心にして，360° 回転させ，それによりできる図 7-4 b に示される回転体の表面を，この場合の Gauss 面とする．この表面 S にかこまれる空間内の電荷はゼロだから，Gauss の法則より

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

である．この回転体の側面ならびに半径 ct_0 の球面上の面（側面の落差がある所）では電気力線と面とが平行で，電束はゼロであるので，Gauss の面積分は，両端面だけですればよく，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S_1}\boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{S}_1+\int_{S_2}\boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{S}_2=0 \qquad (7\text{-}9)$$

となる．ここで S_1, S_2 は回転体の両端の面を意味し，E_1, E_2 はその面を通り抜ける電場を意味する．S_1 を半径 r の球面上の面とすると，E_1 は式 (7-8) で与えられるから，S_1 面上の面積分は

$$\int_{S_1}\boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{S}_1=-2\pi\int_0^{\theta_0}\frac{q(1-\beta^2)r^2\sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

となる．ここで負のサインは面素のベクトル $d\boldsymbol{S}_1$ と $\boldsymbol{E}_1$ がなす角度が 180° であるからである．上式を積分するには，$X=\beta\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
&-\frac{q(1-\beta^2)2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\\
&=\frac{-q(1-\beta^2)}{2\varepsilon_0}\int_\beta^{\beta\cos\theta_0}\frac{(-dX/\beta)}{(1-\beta^2+X^2)^{3/2}}\\
&=\frac{q(1-\beta^2)}{2\varepsilon_0\beta(1-\beta^2)}\frac{X}{(1-\beta^2+X^2)^{1/2}}\Bigg|_\beta^{\beta\cos\theta_0}\\
&=\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\theta_0}{(1-\beta^2\sin^2\theta_0)^{1/2}}-1\right] \qquad (7\text{-}10)
\end{aligned}$$

となる．

同様に S_2 の面積分は，

$$\begin{aligned}
\int_{S_2}\boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{S}_2&=\int_0^{\phi_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}R^2 2\pi\sin\phi d\phi\\
&=\frac{q}{2\varepsilon_0}\int_0^{\phi_0}\sin\phi d\phi=-\frac{q}{2\varepsilon_0}\cos\phi\Bigg|_0^{\phi_0}
\end{aligned}$$

$$=\frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\phi_0) \tag{7-11}$$

である．

式 (7-9) により，式 (7-10) と (7-11) の和はゼロでなければならないから，

$$\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\theta_0}{(1-\beta^2\sin^2\theta_0)^{1/2}}-1\right]+\frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\phi_0)=0$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\theta_0}{(1-\beta^2\sin^2\theta_0)^{1/2}}=\cos\phi_0 \tag{7-12}$$

の関係が求められる．

また式 (7-12) より

$$\sin^2\phi_0=1-\cos^2\phi_0=1-\frac{\cos^2\theta_0}{1-\beta^2\sin^2\theta_0}$$

$$=\frac{\sin^2\theta_0(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta_0)}$$

$$\therefore\quad \sin\phi_0=\frac{\sin\theta_0(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta^2\sin^2\theta_0)^{1/2}} \tag{7-13}$$

が得られ，式 (7-12) を式 (7-13) で割ると，

$$\tan\theta_0=\gamma\tan\phi_0 \tag{7-14}$$

の関係が得られる．

次に加速される電荷によって生じる電磁場を考えよう．話を簡単にするために，電荷から遠く離れた所で電磁場を観測することにし，また電荷の速度は非相対論的で，$v\ll c$ とする．しかし前のように，加速期間 $\varDelta t$ をゼロとみなさないことにする．

$v\ll c$ より，$\gamma\approx 1$ で，式 (7-14) より

$$\tan\theta_0\approx\tan\phi_0$$

$$\therefore\quad \theta_0\approx\phi_0$$

と図 7-5 a のように原点から出る電気力線と，$x=vt_0$ の点から出る電気力線は平行だと考えてよい．加速が始まったという信号は，時間 $t=t_0$ 後には O を中心として ct_0 の半径をもつ球面上に到達し（図の C 点），加速が終わったという信号は，O を中心にもつ，半径 $ct_0-c\varDelta t$ の球面（図の B 点）に到達す

る．また図 7-5 a より，放射線 AB と OC の間隔は $v_{\perp}t_0$ で与えられる．ここで $v_{\perp}$ は電荷の定常速度 v の放射線に対する垂直方向の成分である．そこで電気力線 BC で表わされる，加速により生じた電場 E を，放射線に平行なもの $E_{//}$ と垂直なもの $E_{\perp}$ にわけると，図 7-5 a の図形の関係から

$$\frac{E_{\perp}}{E_{//}}=\frac{v_{\perp}t_0}{c\Delta t}$$

の関係が成り立つ．しかし図 7-5 b のような円柱形の Gauss 面で1本の電気力線の折れ目をかこめば，円柱の側面からの電束はゼロだから，底面からの電束の和がゼロでなければならない．そのため $E_{//}$ は B 点での電場に等しくなくてはならず，これは式 (7-8) より

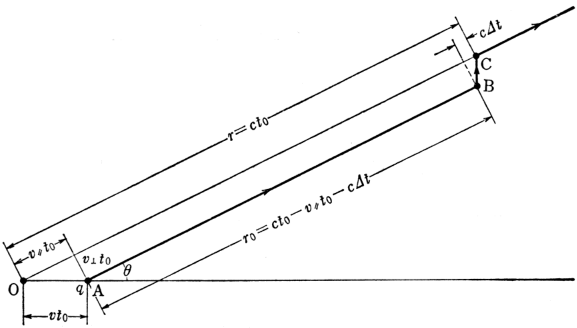


図 7-5 a
加速された電荷 q による電場は BC の方向にある．

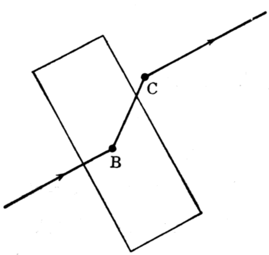


図 7-5 b
電気力線の折れ目を円柱形の Gauss 面でかこむ．

$$E_{//}=\frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r_0{}^2(1-\beta^2\sin^2\theta)}$$

で与えられる．しかし今の場合は $v\ll c$, $\beta\approx 0$ より

$$E_{//}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0{}^2}$$

で，また $r\approx r_0$ より

$$E_{//}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{7-15}$$

となる．

加速度の放射線に対して垂直な成分を $a_\perp$ とすると，$v_\perp=a_\perp \varDelta t$ より，

$$E_\perp=E_{//}\frac{v_\perp t_0}{c\varDelta t}=E_{//}\frac{a_\perp \varDelta t\cdot t_0}{c\varDelta t}$$

$$=E_{//}\frac{a_\perp}{c}t_0$$

となる．更に $ct_0=r$ より

$$E_\perp=E_{//}\frac{a_\perp}{c^2}r \tag{7-16}$$

で，式 (7-16) に式 (7-15) を代入すると，

$$E_\perp=\frac{qa_\perp r}{4\pi\varepsilon_0 r^2c^2}=\frac{qa_\perp}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} \tag{7-17}$$

となる．図 7-5 a より $E_\perp$ と $a_\perp$ の方向が反対であることがわかるから，式 (7-17) をベクトルで表わすと

$$\boldsymbol{E}_\perp=-\frac{q\boldsymbol{a}_\perp}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}$$

となる．また $\boldsymbol{E}_\perp, a_\perp$ は時空の関数だから，時刻 t のときに原点より $\boldsymbol{r}$ の点で観測される $\boldsymbol{r}$ に垂直な電場は

$$\boldsymbol{E}_\perp(\boldsymbol{r},t)=-\frac{q\boldsymbol{a}_\perp(t')}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} \tag{7-18}$$

$$t'=t-\frac{r}{c}$$

で与えられる．ここで加速の値ならびに方向は，観測時刻 t のときのものではなく，それより r/c だけ前のときの値であること，つまり点 A の遅延点 O

での値と方向であることを忘れてはならない．また $E_{//}$ は前に述べたように，0 で静止している q による放射方向にある電場で，この成分を見るかぎり，q が短時間加速されたという情報は得られない．この情報は放射線に垂直な成分 $E_{\perp}$ と，これに直交する磁場，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\hat{r}\times\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r},t) \tag{7-19}$$

とで，電磁波として，速度 c で伝播する．この現象を加速された電荷 q による輻射という．ラジオ，テレビ等の交信電波，X 線，γ 線，あるいは可視光線等，電磁波はすべて，電荷の運動によって起きる輻射現象である．

次にこの輻射が運ぶエネルギーを考えよう．電磁場のエネルギーは Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$（第5章参照）で与えられるから，式 (7-18), (7-19) より $\boldsymbol{S}$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0 c}E^2\hat{r}=\frac{1}{\mu_0 c}\left[\frac{-q\boldsymbol{a}_{\perp}(t')}{rc^2\,4\pi\varepsilon_0}\right]^2\hat{r}\\&=\frac{q^2a_{\perp}{}^2(t')}{16\pi^2r^2\mu_0c^5\varepsilon_0{}^2}\hat{r}=\frac{q^2a_{\perp}{}^2(t')c^2}{16\pi^2r^2\varepsilon_0c^5}\hat{r}\\&=\frac{q^2a_{\perp}{}^2(t')}{16\pi^2c^3\varepsilon_0r^2}\hat{r}\end{aligned} \tag{7-20}$$

となる．

図 7-6 に示されるような観測点 P で，時刻 t のときに r に垂直な面素 dS を単位時間に通り抜けるエネルギーは，

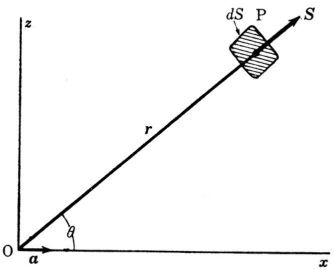


図 7-6　面素 dS を通り抜ける Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}=S(\boldsymbol{r},t)dS$$

で与えられる．ここで，時刻 $t'=t-r/c$ のとき，加速度 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{r}$ とがなす角を θ とすれば，$\boldsymbol{a}_\perp=\boldsymbol{a}\sin\theta$ より

$$S(\boldsymbol{r},t)dS=\frac{q^2a^2\sin^2\theta dS}{16\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}$$

となる．しかし

$$dS=r^2d\Omega=r^2\sin\theta d\theta d\psi$$

だから，

$$S(\boldsymbol{r},t)dS=\frac{q^2a^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}\cdot r^2\sin^3\theta d\theta d\psi \tag{7-21}$$

となる．したがって，時刻 t のときに半径 r の球面を単位時間に通り抜けるエネルギー，つまり仕事率 P は，

$$\begin{aligned}P&=\int_S S\cdot dS=\frac{q^2a^2\,2\pi}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\\&=\frac{q^2a^2}{8\pi\varepsilon_0c^3}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta(\sin^2\theta+2)\right]_0^\pi\\&=\frac{q^2a^2(t')}{6\pi\varepsilon_0c^3}\end{aligned} \tag{7-22}$$

で与えられる．

式 (7-22) は，半径 r_1 の球面を時刻 t_1 のときに単位時間に通り抜けるエネルギーと，半径 $r_2>r_1$ の球面を，時刻 $t_2>t_1$ のときに単位時間に通り抜けるエネルギーとが

$$t'=t_1-\frac{r_1}{c}=t_2-\frac{r_2}{c}$$

であれば等しいことを意味している．これはエネルギーは保存され，電荷から放射線上に，速度 c で運ばれることを意味している．

7-3　任意の運動をする電荷による電磁場

今までは一定方向に短時間加速された電荷による電磁場について話を進めてきたが，次に任意に移動する電荷の電磁場について簡単にふれよう．話を簡単

にするために，前と同様，電荷の速度が $v \ll c$ の場合のみを考える．また電磁場を観測する点は電荷から十分に遠く，また電荷の移動範囲は，観測点と電荷との間の距離に対して十分に小さいとする．この条件のため，各時点における，電荷と観測点を結ぶ線の長さと方向は，ほとんど変わらず，一定のベクトル $\boldsymbol{r}$ で与えられると考えられる．このため，この線に対する垂直方向も一定である．電荷は任意に移動するから，加速度 $\boldsymbol{a}$ も任意に変化する．しかし，$\boldsymbol{a}$ は非常に短い時間 $\Delta t'$ 内では一定であると仮定すれば，時刻 t のときの観測点での電場は，式 (7-18) より，時刻 $t'=t-r/c$ のときの電荷の加速度の $\boldsymbol{r}$ に対する垂直成分 $\boldsymbol{a}_\perp(t')$ で与えられる．

時間 $\Delta t'$ が過ぎ，加速度 $\boldsymbol{a}$ が変化し，また $\Delta t'$ の間だけ，一定の値をもつとすると，この二つの信号が観測点に到達する時間のずれ Δt は，$\boldsymbol{r}$ が一定なら

$$\Delta t=\Delta\left(t'+\frac{r}{c}\right)=\Delta t'$$

となって $\Delta t'$ と同じだが，もしも前の仮定に反して，$\boldsymbol{r}$ が変化するような場合は

$$\Delta t=\Delta t'+\frac{\Delta r}{c}$$

となり，$\Delta t \neq \Delta t'$ である．この場合は後の信号が前の信号に追いついたりして，観測点で時刻 t のときに観測する電場は，“遅延時間” $t'=t-r/c$ のときの電荷の状態にのみによるのではなく，それ以外の状態にも依存するようになる．このように信号が重なる状態をさけるには，$\Delta r/c \approx 0$ であればよく，そのためには

$$\frac{\Delta r}{c}=\frac{\Delta t' v_{/\!/}}{c}\approx 0$$

であればよい．ここで $v_{/\!/}$ は電荷の速度 v の r の方向に平行な成分である．上の条件は $v_{/\!/}/c \ll 1$，つまり $v/c \ll 1$ と，初期の条件が満たされればよい．

v が c に対してあまり小さくない場合，あるいは，r が電荷に近い場合（たとえばアンテナのすぐそば）の電磁場を求めることは，かなり複雑で，式 (7-18) だけでは与えられない．しかしこれはこの本の範囲を越えるので，こ

こではふれない．だがこれら移動する電荷による電磁場を求めるには，電荷と電流密度，ρ と $\boldsymbol{j}$ を含む空間で Maxwell の方程式を解けばよいことは明らかで，この場合は ρ も $\boldsymbol{j}$ も時空の関数となる．またスカラーポテンシャル，$\phi(\boldsymbol{r},t)$，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を求めるときには，遅延時間 $t'=t-r/c$ のときの ρ, $\boldsymbol{j}$ を使わなければならない．この場合のポテンシャルは“遅延ポテンシャル”と呼ばれる．

第 8 章

電磁場の量子化—光子

Maxwell の方程式は電磁波の振舞いを含めて，電磁現象のすべてを記述すると前に述べた．事実静電磁場の振舞いから，光の屈折，反射等，また導波管内での電磁波の振舞い等，いわゆる巨視的な世界での電磁場の現象はすべて Maxwell の方程式で記述できる．しかし微視的な世界，つまり，原子や分子の世界での現象は，Maxwell の方程式だけでは説明できないことが今世紀の初めに発見された．Maxwell の方程式だけでは説明できない現象の一つに光電効果がある．

8-1 光電効果と光子の概念

可視光や紫外線が金属面に当たると，その表面から電子がはじき出される．この現象は光電効果と呼ばれている．この現象は光が電磁波であることを考えればさほど不思議な現象ではない．なぜなら電磁波により金属を構成する原子内の電子に力が働き，その力により電子が金属の外部にはじき出されることは

十分に考えられるからである．しかし定量的に光電効果の現象を調べると，はじき出された電子の運動エネルギーが光の強度に依存しないことがわかった．これは Maxwell の方程式だけでは説明できない結果である．光の強度は電磁波の振幅，つまり電磁場の強さの2乗に比例するから，光の強度が大きければ大きいほど，金属内の電子の受ける力は大きいはずである．したがって，はじき出された電子の運動エネルギーも大きいはずである．ところが実際には，強度を上げるとはじき出される電子の数が増加するが，エネルギーには変化がない．

そこでこの謎を解くために 1905 年に Einstein は，Planck が 1900 年に提唱した黒体輻射の理論の基礎である“周波数 ν をもつ振動子は $E=h\nu$（h は定数で Planck の定数と呼ばれる）で与えられるエネルギーを吸収したり，放出することができる”という仮定を使って，単色光のもつエネルギーは，その波長 λ に対する周波数 $\nu=c/\lambda$ に比例し，$E=h\nu$ で与えられるという画期的な提案をした．この考えによると，光は $h\nu$ というエネルギーをもつ“束”からでき上がっていて，この“束”の数が多ければ多いほど，光の強度が強い．そして，はじき出された電子の運動エネルギー $E_{\rm kin}$ は

$$E_{\rm kin}=E-W=h\nu-W \qquad (8\text{–}1)$$

で与えられる．ここで W は仕事関数と呼ばれ，電子を金属より取り出すのに必要なエネルギーで，個々の金属に特有な量である．式(8–1)よりわかるように，はじき出される電子のエネルギーは光の周波数に比例し，電子の数は光の強度に比例する．この Einstein の考えは，まさに電磁波の量子化であり，いいなおせば電磁場の量子化である．量子化とは微視の世界では色々な物理的量が連続的な値をもたずに離散的な値をもつことを意味する．水素原子内の電子のもつエネルギー，陽子のスピン等がその例である．そして量子化された場，つまりこの場合ではエネルギー $h\nu$ をもつ“束”は，後で述べるように粒子の性質をもつ．“量子化された場＝粒子”という概念は場の理論の根底にある考えで，素粒子の学問はすべてこの概念にもとづいていると考えてよい．今までに，最も成功をおさめた場の理論は電磁場を量子化した，いわゆる“量子電磁気学”である．そして量子化された電磁場（実際には電磁波の電磁場）を“光子”と呼び，これは γ という記号で表わされる．

さて話を少し前にもどし，Planck が h という定数を求め，振動子の量子化を提唱した背景について簡単に述べよう．閉ざされた空洞に小さな穴をあけ，そこから放出される輻射を測定すると，いわゆる黒体輻射が検出される[†]．そして，黒体輻射の波長の分布と空洞の温度には一定の関係があるが，それを古典統計力学的な手法で求めることができなかった．そこで Planck は前述のように，黒体輻射をする振動子のエネルギーは $E=nh\nu$（n は整数）で与えられるという，“一時しのぎ的”な仮定をして，黒体輻射の波長分布と温度の関係を求めた．この Planck の定数と呼ばれる h は，エネルギー×時間の次元をもち，

$$h=6.626\times10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

の値をもつ．更にエネルギー×時間の次元は，質量×長さ×長さ÷時間÷時間×時間の次元である．したがってこれは

$$\begin{aligned}\text{質量}\times\text{長さ}\div\text{時間}\times\text{長さ}&=\text{運動量}\times\text{長さ}\\&=\text{角運動量}\end{aligned}$$

と書きなおせるので，h は角運動量の次元をもつことがわかる．そして量子力学では角運動量はすべて，$h/2\pi\equiv\hbar$ の整数倍か，$\hbar/2$ の奇数倍に量子化される．

8-2 光子を分割できるか？

光電効果を説明するのに光子の概念が必要なことはわかったが，光子は本当に Maxwell の方程式では解釈できないか考えてみよう．光子を Maxwell の方程式で記述できる電磁波の“波束”，つまり図 8-1 のようなパルスであると考えると，どのような問題が起こるだろう．

原子による発光スペクトルを観測すると，発光する光は常に同じ周波数，つまり同じ色をもっている（たとえばナトリウムは黄色の光を強く発光する）．このこと自体は特に不思議なことではない．なぜならば原子による発光は原子内部の電子の振動によると考えれば，この振動周波数は，その原子に固有なものと考えうるからである．しかしこうして発生した光が $h\nu$ という一定のエネ

---

† くわしくは久保亮五著“統計力学”（共立出版）を参照．

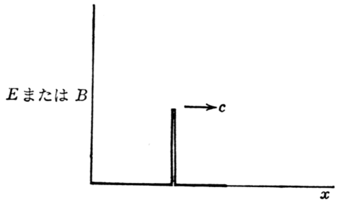


図 8-1
光子を“光束”とみなせるか？

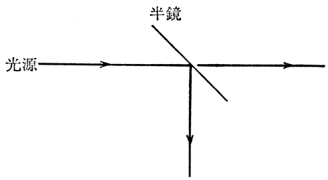


図 8-2
“光束”を二つに割る.

ルギーをもつということは，光電効果のとき述べたように，振動の振幅が変化しうることを考えれば，理解しにくい現象である．更に，どの原子から発光する光のエネルギーも，その色に対応する周波数掛ける h というエネルギーをもつ．これはすべての原子について共通の定数 h の存在を意味し，これも Maxwell の方程式からは理解できないことである．

次に電磁波の波束を図 8-2 のように，光を反射もするし，また透過もする“半鏡”に当て，反射した波と透過した波の強度が，最初の入射した光の強度のちょうど半分になるようにする．Maxwell の方程式で表わされる古典電磁気学で考えれば，このように二分された波のエネルギーは最初のエネルギーの半分になる．$E=h\nu$ より，二分された波の波長は入射光の波長の2倍となり，色が変わるはずである．しかし実際には波長は変わらない．この実験は光子を二分することができないことを示している．この実験で実際に起こったことは光子の数が二分されたことである．つまり電磁波は $h\nu$ というエネルギーをもつ光子より成り立ち，電磁波の強度は，光子の数に比例している．以上の例以外にも数多くの自然現象より，光子を古典的に解釈することが不可能なことが示され，微視的な世界での電磁気学は，電磁場を量子化した，量子電磁気学によって記述されなければならない．

8-3　光子の性質

8-1 節で光子のエネルギーは $E=h\nu$ と量子化されていることを知った．また第5章で述べたように，電磁波のエネルギーが E ならば，その運動量は

E/c で与えられる．これは電磁波が量子化されていても同じで，光子の運動量 P は

$$P=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c} \tag{8-2}$$

で与えられる．また相対論より粒子のエネルギーは，その静止質量 m_0 と運動量 P より

$$E^2=m_0{}^2c^4+P^2c^2 \tag{8-3}$$

で与えられるから，式 (8-2) を式 (8-3) に代入すれば

$$h^2\nu^2=m_0{}^2c^4+\frac{h^2\nu^2}{c^2}c^2 \tag{8-4}$$

となり，$m_0=0$ でなければならない．これより，光子は常に光速 c で動いている質量ゼロ，電荷ゼロ，エネルギー $h\nu$，運動量 $h\nu/c$ の粒子と考えることができる．また第5章で述べたように，電磁波には角運動量がある．これが量子化された場合は，$1\hbar$（なぜこの値をもつかは，ここでは説明しない）で，このような粒子固有の角運動量のことを“スピン”と呼ぶ．つまり光子のスピンは $\hbar$ の単位で1である．ちなみに，同じ単位を使うと，電子，陽子，中性子のスピンは 1/2，パイ中間子のスピンは0である．

更に，一般に粒子にはそのもの固有のパリティーという量子数がある．これはこの粒子を表わす量子化された場の関数が，座標の向きを反対にしたとき，つまり，$x\rightarrow-x$，$y\rightarrow-y$，$z\rightarrow-z$ にしたときに，符号を変えるか，変えないかを示す量で，$+1$ か -1 の値をもつ．場の関数が座標変換後変わらなければ，この場のパリティーは $+1$ で，前の値の負の値をとれば，-1 である．量子化された電磁場のパリティーは -1 である．つまり光子のパリティーは -1 である．

また光子の概念は電磁波の場合のみ意味があるのだから，光子は電磁波を構成する電磁場を量子化して得られるものであって，静電場とは区別されなければならない．実際どのようにして電磁波が量子化されるかは，この本の範囲を越えるから，ここでは説明しない．しかし，Planck が振動子のエネルギーを $E=nh\nu$ として，黒体輻射を説明したことを考えれば，振動子の量子化という考えを使うことによって，電磁波の量子化ができるという想像はつくであろ

う．そして，光子の発生，または吸収という現象も，外部の影響により，ある周波数をもつ振動子の数が一つ増したり，減ったりする現象とみなして，量子力学的に解釈できる．

8-4　Compton 散乱

話がやや複雑になったが，光子が粒子の振舞いをすることはよくわかったと思う．そこで，電磁波の振舞いを最もよく表わす現象として Compton 散乱をとり上げよう．

1922 年に Compton は，物質による電磁波の散乱は電磁波が光子から成り立っていることから，光子と物質の散乱として玉突きの二体弾性散乱のようにみなせると考え，次のような解析を行った．Compton の考えた散乱は，光子と物質を構成する原子内の電子との散乱で，この場合，電子は最初静止していて散乱後自由に反跳できると仮定された．入射する電磁波の周波数を ν とすると，入射光子のエネルギーと運動量はそれぞれ $h\nu$，$h\nu/c$ である．また，入射方向に対する散乱角を θ とし，散乱後の光子のエネルギーと運動量を E_γ'，P_γ' とする．更に電子の静止質量を m_e とし，その散乱角を ϕ，散乱後のエネルギーと運動量を E_e，P_e とする．散乱前後のエネルギーと運動量が保存されなければならないから，

$$h\nu+m_ec^2=E_e+E_\gamma'=E_e+h\nu' \tag{8-5}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_\gamma'+\boldsymbol{P}_e \tag{8-6}$$

が成り立たなければならない．式 (8-6) を成分にわけると

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{h\nu'}{c}\cos\theta+P_e\cos\phi \tag{8-7 a}$$

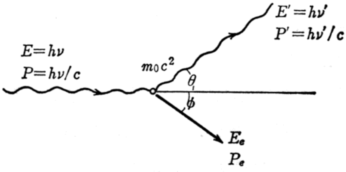


図 8-3　Compton 散乱

$$0=\frac{h\nu'}{c}\sin\theta+P_e\sin\phi \tag{8-7 b}$$

また，式 (8-5) の E_e は電子の全エネルギーだから

$$E_e=\sqrt{m_e{}^2c^4+P_e{}^2c^2} \tag{8-8}$$

で与えられる．

式 (8-7 a)，(8-7 b) を整理し，両式を2乗してたすと

$$P_e{}^2c^2\cos^2\phi+P_e{}^2c^2\sin^2\theta=(h\nu')^2\sin^2\theta+(h\nu)^2+(h\nu')^2\cos^2\theta$$
$$-2(h\nu)(h\nu')\cos\theta$$

$$\therefore\quad P_e{}^2c^2=(h\nu')^2+(h\nu)^2-2(h\nu)(h\nu')\cos\theta \tag{8-9}$$

となる．

次に式 (8-5) を整理して2乗すると

$$(h\nu-h\nu'+m_ec^2)^2=m_e{}^2c^4+P_e{}^2c^2$$
$$(h\nu)^2+(h\nu')^2-2(h\nu)(h\nu')+m_e{}^2c^4+2m_ec^2(h\nu-h\nu')$$
$$=m_e{}^2c^4+P_e{}^2c^2 \tag{8-10}$$

式 (8-10) に式 (8-9) を代入すると

$$-2(h\nu)(h\nu')+2m_ec^2(h\nu-h\nu')=-2(h\nu)(h\nu')\cos\theta$$

となり，これを ν' について解くと

$$\nu'=\frac{\nu}{1+\dfrac{h\nu}{m_ec^2}(1-\cos\theta)} \tag{8-11}$$

が求められる．ここで波長 $\lambda=c/\nu$ より，式 (8-11) を波長で表わせば

$$\lambda'=\lambda+\left(\frac{h}{m_ec}\right)(1-\cos\theta) \tag{8-12}$$

となる．式 (8-12) より弾性散乱した電磁波の波長が長くなることがわかる．また (h/m_ec) は Compton 波長とも呼ばれ $h/m_ec=2.43\times10^{-10}$ cm の値をもつ．

Compton はグラファイト（炭素の一種）に波長約 7×10^{-9} cm の X 線を入射して，散乱後の X 線の波長を測定し，自分の理論が正しいことを証明した．Compton 散乱は光子の存在を疑いないものにし，量子力学の強い裏づけとなった．

8-5　制動輻射，電子対創生，電子-陽電子消滅

光子に深く関連する現象に，制動輻射，電子対創生，電子-陽電子消滅がある．制動輻射とは荷電粒子が物質を通り抜けるとき，物質を構成する原子核の電場の影響で，その軌道が曲げられ，その結果光子が発生する現象である．これは荷電粒子が電子の場合特に顕著に現われる現象である．高いエネルギー(たとえば1GeV以上くらい)に電子を加速する電子シンクロトロンや，線型加速器は，高いエネルギーの電子源としてばかり使われるわけではない．加速された電子をプラチナ等の物質に当てれば，制動輻射によって高いエネルギーの光子が生成されることから，高いエネルギーの光子の源としても使われる．

電子対創生とは，約1MeV以上のエネルギーをもつ光子($h=4.1\times10^{-21}$ MeVsより，$\nu=2.4\times10^{20}$/s以上，または$\lambda=1.25\times10^{-10}$ cm以下の電磁波)が物質に当たると，電子と陽電子(電荷が正の電子で，電子の反粒子である)の対が生成される現象である．これは光電効果，Compton散乱とともに，生成された荷電粒子を用いて，電気的に中性な光子の存在の検出，そのエネルギーの測定を行うのに利用されている．

前記の現象の逆の現象としては，電子-陽電子消滅がある．これは電子と陽電子が衝突すると，散乱する以外に，お互いに消滅し合い，二つの光子に変わってしまう現象である．光子をγと表わし，電子，陽電子をそれぞれe^-，e^+と表わすと，この反応は

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \tag{8-13}$$

と書くことができる．この場合，光子を1個だけ発生することは，エネルギーと運動量の保存が成り立たないから不可能である．

以上述べた現象は，粒子の生成，あるいは消滅等，Newtonの力学の根底にある“力”という概念だけで説明できないものである．そこで“力”に代わる広い意味での力として，“相互作用”と呼ぶ概念が生まれた．“相互作用”については第1章でも簡単にふれたが，“状態の変化を起こすもの”と考えればよい．したがって，力も当然相互作用の一つである．そして相互作用を媒介するものが“場”であることは第1章に述べたとおりで，その場が電磁場の場合

は，この相互作用を“電磁相互作用”と呼ぶ．

8-6 電子による光子の発生と吸収―仮想光子の交換

そこでこの節ではもう少し具体的に電磁相互作用の機構につき議論し，どのように電磁場がこの相互作用を媒介しているか，考えてみよう．

原子は陽子と中性子から成り立つ原子核と，それをとりまく電子から構成されている．そして電子のもてるエネルギーは任意な値ではなく，固有の値である．原子内の電子のエネルギーの量子化は Bohr の水素原子モデルに端を発し，それにより量子力学が生まれたことはよく知られている．電子が高いエネルギー E_1 から低いエネルギー E_2 の状態に変わるときには，そのエネルギー差

$$\Delta E = E_1 - E_2 = h\nu$$

をもつ光子が発生し，これが原子の発光スペクトルをつくる．同様に原子に ΔE のエネルギーをもつ光子を当てれば，電子は E_2 の状態から E_1 の状態に変わり，吸収スペクトルが得られる．

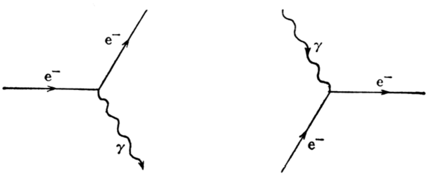
この二つの相互作用を反応方程式で表わせば，

$$e^- \rightarrow e^- + \gamma \tag{8-14}$$

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- \tag{8-15}$$

となり，これを図形化するなら図 8-4 (a), (b) のように表わせる．

このような図は Feynman diagram と呼ばれ，反応を視覚的に理解するのに役立つばかりか，理論物理的にも大事な意味をもつが，ここでは前者の目的のためにのみ使うことにする．また矢印は粒子の進行方向を示す．



(a) $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ (b) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$

図 8-4

反応 (8–14), (8–15) では両方ともエネルギーと運動量の保存が成り立たないことから，実際には起きない反応である．(原子の場合はこれらの反応が独立して起きるのではなく，原子の電場の中で起きるので，エネルギーと運動量が全体としては保存される.) 量子力学の基本的な原理として Heisenberg の不確定性の原理がある．この原理によれば，エネルギーの変化 ΔE が時間 Δt の間に起これば，この二つの量の間には

$$\Delta E \Delta t \leqslant \hbar \tag{8–16}$$

の関係がある．つまりエネルギーと時間には式 (8–16) で与えられる不確定性がある．そこで反応 (8–14), (8–15) が非常に短い時間の間に起きれば，かなり大きなエネルギーの不確定性が許され，その間ではエネルギー，運動量の保存が原理的に確かめられない．このような状態を“仮想状態”と呼ぶ．反応 (8–14) で光子が非常に短時間に発生するなら，この光子は“仮想光子”と呼ばれ，また反応 (8–15) で光子が非常に短時間で吸収されれば，これも“仮想光子”である．次に図 8–4 (a) と 8–4 (b) を，光子を共通な要素としてつなぐと図 8–5 ができ上がる．この図で表わす反応は

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

で，これは電子と電子との散乱である．これから電子と電子との散乱は，一つの電子が光子を発生させ，他の電子がそれを吸収する．つまり仮想光子の交換という機構で起こることがわかるであろう．そして光子はエネルギーと運動量をもつから，図 8–5 の上の電子から下の電子にエネルギーと運動量が与えられる．これはとりもなおさず上の電子から下の電子に力が働くことを意味する．これで量子化された場の概念が物理学的相互作用を解明するのにいかに大切なものであるかが，更に明瞭になったであろう．

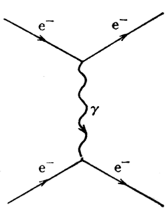


図 8–5　$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ 反応の Feynman diagram

以上の論議より電磁相互作用の基本的な反応は，反応（8-14）であると考えることができて，すべての電磁相互作用は，その基本反応の組合せ，またはそれを多少変化させたものの組合せと考えることができる．そして量子電磁気学によって，これらの組合せよりなる色々の電磁相互作用の起きる確率，つまり反応断面積，粒子のエネルギー分布等，観測できる物理的量を計算することができる．このような理論計算値と実際に測定された実験値とは，$1/10^9$ 以内という驚異的な精度で一致している．また量子電磁気学が 5.5×10^{10} cm の距離間から約 10^{-14} cm の距離間で起きる電磁相互作用をすべて正確に記述できることも実験的に立証されている．強い相互作用，弱い相互作用に比べると，電磁相互作用はほぼ完全に理解されているといえ，量子化された場の交換の概念が正しいことが示された．

次に参考までに基本反応を使って，今まで出てきた電磁相互作用の図形を示そう．

Compton 散乱は図 8-6 のように表わせる．しかしこの場合は仮想粒子は光子ではなく，電子であることに注意しなければならない．図 8-7 は制動輻射を示す．これは陽子の電場の影響で制動輻射が起こった場合である．ここでは $p \to p+\gamma$ 反応が $e^- \to e^-+\gamma$ 反応の代りに使われる．

電子対創生は，上と同様陽子の電場の影響で起きたとすると，図 8-8 のようになる．ここでは仮想電子と光子が両方必要である．

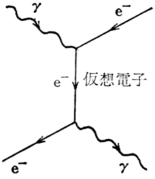


図 8-6 Compton 散乱

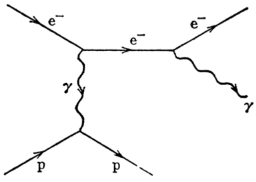


図 8-7 制動輻射

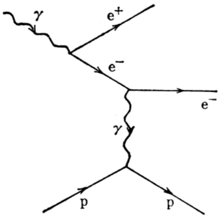


図 8-8 電子対創成

8-7　電磁相互作用と強い相互作用

前節で述べた電磁相互作用は典型的なものでよく知られているが，光子のエネルギー，あるいは電子-陽電子の衝突エネルギーが高くなるにつれ，色々と新しい反応が可能になり，高エネルギー物理学の研究のためにこれらの反応は重要な役割りを果たしている．ここでその代表的例をいくつか紹介しよう．

前節の反応は皆，生成された粒子が光子か電子，陽電子で，これらは強い相互作用をしない粒子である．しかし電磁相互作用でも強い相互作用をする粒子を生成することができる．その例に π 中間子の光生成反応がある．これは

$$\gamma+\mathrm{p}\rightarrow\pi^{+}+\mathrm{n} \tag{8-17}$$

$$\gamma+\mathrm{p}\rightarrow\pi^{0}+\mathrm{p} \tag{8-18}$$

等の反応で，実際の実験では高エネルギー光子を液体水素の標的に入射して，生成された粒子を検出する．反応 (8-17) を前節のように図形化すると，図 8-9 のようにかける．ここで光子と π^- と π^+ が結合する所（図の黒丸の所）は，電磁相互作用の理論だけでは解明できず，強い相互作用の影響も考慮せねばならない．したがって，この反応に関する理論計算には，この黒丸の所についての色々な仮定が必要で，前節で述べた反応の場合と違って，実験と理論との一致の精度もあまりよくない．また理論といっても現象論で，理路整然としているというよりは，実験データに一番よく合うような答を出す仮定が用いられる．そしてその後，初めてこの仮定の理論的妥当性が論議されるという場合が多い．

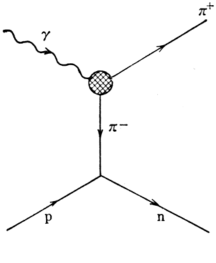


図 8-9　π^+ 中間子の光発生

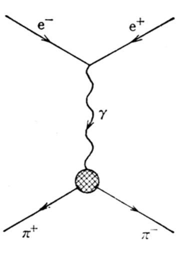


図 8-10　$\mathrm{e}^{+}+\mathrm{e}^{-}\rightarrow\pi^{+}+\pi^{-}$

1970 年代に入ってから高エネルギー電子-陽電子反応で一連の質量の大きい(陽子の質量の約 3 倍から 10 倍くらいまでの質量）中間子が発見されて以来，電子-陽電子の衝突反応が脚光を浴びるようになった．電子-陽電子反応でも強い相互作用をする粒子が生成できるという一例として，

$$e^- + e^+ \to \pi^+ + \pi^-$$

がある．この反応は図 8-10 のように表わすことができ，図の黒丸の所が光子と強い相互作用をする π 中間子との結合を示し，この結合の強さにより，反応断面積の大きさが左右される．前例と同様この黒丸点の理論的解明はまだ初期段階にあり，まだ電磁相互作用と強い相互作用を統合する理論はない．

8-8 電磁相互作用と弱い相互作用

弱い相互作用の一例としては，中性子のベータ崩壊がある．これは

$$n \to p + e^- + \bar{\nu} \qquad (8\text{-}19)$$

と書ける．ここで $\bar{\nu}$ は反ニュートリノで，ニュートリノの反粒子（陽電子が電子の反粒子であるのと同じ意味）である．弱い相互作用も量子化された場によって媒介されると考えると，電磁相互作用の光子に対応する粒子は，ベクトルボゾンと呼ばれ，スピン 1 をもつ中間子である．この粒子の実存はまだ立証されていないが，その質量は数十 GeV と非常に大きいと考えられている．この中間子を使って反応 (8-19) の Feynman diagram を書くと図 8-11 のようになる．ここで W^+ がベクトルボゾンである．この図からわかるようにベクトルボゾンは荷電粒子であり，反応により正，負いずれの符号もとれる．また

$$\nu + p \to \nu + p \qquad (8\text{-}20)$$

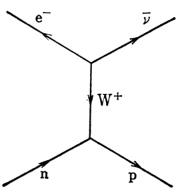


図 8-11 $n \to p + e^- + \bar{\nu}$

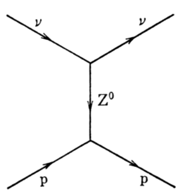


図 8-12 $\nu + p \to \nu + p$

のような陽子によるニュートリノの弾性散乱は，図 8–12 のように表わせる．ここでは交換されるベクトルボゾンの電荷はゼロなので，荷電粒子である $W^{\pm}$ と区別するために Z^0 と表わす．そして，この Z^0 が電磁相互作用と弱い相互作用とを結ぶ要素である．それは光子も Z^0 もともに電荷ゼロ，スピン1の粒子であるからだ．質量ゼロと数十 GeV と大きな差が質量にあるが，光子と Z^0 は同じ粒子の家族に属し，電磁相互作用も弱い相互作用も本質的には同じ相互作用で，ある機構により二つの“顔”をもつという理論が，1970 年代の初めに Weinberg と Salam により独自に提案された．その後この理論は実験的に色々と検証され，まだ不備の点があるとはいえ，根本的には正しい理論であると考えられている．この理論により，電磁相互作用と弱い相互作用の統合がほぼ成功したといえ，自然界のすべての相互作用の統合化に大きな進歩が見られた．そしてこの統合をいずれ可能にするものは“場”であることは今までの議論からほぼ疑いのないことである．

8-9　電磁相互作用に残された問題

この本を読み終えた読者は電磁相互作用はすべて解決ずみで，なにも問題が残っていないように思うかもしれない．しかし電荷がなぜ電子の電荷の単位，あるいは，第2章で少しふれたクオークのように，電子の電荷の 1/3，2/3 の単位で量子化されているのかという問題はまだ未解決である．電荷の量子化を説明する一つの手段として，Dirac は電荷に相当する磁気単極子と呼ばれる量を提案した．今までに色々な実験により磁気単極子の検出が試みられたが，今のところその存在の証拠はなく，電荷の量子化の謎はまだ解けていない．

付録 I

物質中での電磁場

この本では電磁場の本質的な概念を強調したかったので，自由空間内でのその振舞いについて述べた．しかし実際の自然界は自由空間とは程遠く，色々な物質があるので，ここでごく簡単に電磁場の物質内での振舞いについて説明する．

A 1-1　導体と絶縁体

物質といっても色々な種類があるが，電場に関する限り，導体と絶縁体にわけることができる．

導体とは金属のように電流が流れる物質で，その内部には，自由に動ける自由電子と呼ばれる電子がある．電流はこれら自由電子の流れであることは第3章で述べたとおりである．絶縁された（つまり他の物体とつながっていない）導体を静電場内におくと，非常に短い時間に導体内の電荷が再分布し，一番安定した電荷分布をつくる．一番安定した分布とは，電荷の動きがないことで，

これは導体内部の電場がゼロであることを意味する．そこで導体に帯電させると，その電荷は導体の表面にのみ存在する．つまり，導体内の電位はどこでも同じで，導体の表面は，等電位面である．したがって，電気力線は導体の表面に常に垂直でなければならない．

絶縁体内には自由に動ける電荷はない．しかし，外部電場の影響のもとで，絶縁体内の電荷に力が働き，正，負の電荷の分離が起こり，内部電場ができる．水のような絶縁体の分子はその構造から，固有の電気双極モーメントをもつ（このような分子は有極性分子と呼ばれる）．これらの双極モーメントは，外部電場がなければ，図 A 1-1 (a) のように，任意に分布するため，水全体としての双極モーメントはゼロである．しかし外部電場中におかれると，個々の双極モーメントが，外部電場から受けるトルクで，図 A 1-1 (b) のように，その向きが外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ に不完全ながらもそうようになり，物質全体として電気双極モーメントをもつようになる．有極性分子で構成されていなくても，絶縁体内に任意に分布している正，負の電荷は，図 A 1-2 (a) のように，外部電場

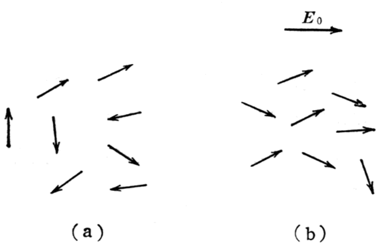


図 A 1-1
↑は電気双極モーメントを表わす．

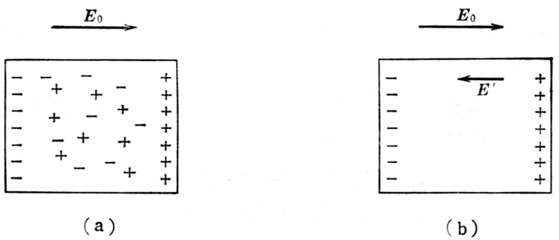


図 A 1-2

の影響でやや分離され，全体として電気双極モーメントができる．この現象は誘電分極と呼ばれる．絶縁体が誘電体とも呼ばれるのはこの現象のためである．今後は誘電体という名称を使うことにする．

図 A 1-2 (a) より明らかなように，誘電体は全体としては電気的に中性だが，外部電場の影響で，その表面に電荷が現われる．この表面電荷をのぞけば誘電体内の電荷の総和はゼロだから，図 A 1-2 (a) は図 A 1-2 (b) のように略すことができる．そして，誘電体の内部に表面電荷による電場 $\boldsymbol{E}'$ ができることがわかる．$\boldsymbol{E}'$ の向きは外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ の方向と反対で，誘電体内の総電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$$

で与えられる．$\boldsymbol{E}<\boldsymbol{E}_0$ より，誘電体内の電場は，外部電場より弱い．

第 2 章で出てきたコンデンサーの電極間に誘電体をつめると，電極の帯電量が，つめる前と同じなら，コンデンサーの容量 C は，

$$C=\frac{q}{V_0};\qquad V_0=E_0d$$

より（d は電極間の距離，E_0 は自由空間での電極間の電場），誘電体内の電場 E が E_0 より小さいことから，$V_0>Ed$ となる．したがって誘電体がつまっているコンデンサーの容量 C_d は

$$C_d=\frac{q}{Ed}>C$$

と，前より大きくなる．ここで

$$\kappa\equiv\frac{E_0d}{Ed}=\frac{E_0}{E}\tag{A 1-1}$$

と定義すると，κ は誘電体に固有な量で，電媒定数と呼ばれる．真空の電媒定数は 1，水のは約 78，ガラスのは約 4 である．

次に Gauss の法則を誘電体内の電場に応用するため，前例のコンデンサーの場合を考えてみよう．図 A 1-3 のように，コンデンサーの上の極板に正の電荷 $+q$ を帯電させ，下の極板に $-q$ の電荷を帯電させると，極板間の誘電体の表面に $-q'$ と $+q'$ の電荷が誘電される．また電極の面積を A とし，底面積 A の直方体面を図 A 1-3 のようにとると，Gauss の法則より

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q-q'}{\varepsilon_0}=EA \qquad \text{(A 1-2)}$$

が得られる（電極は導体だから，内部電場はゼロである）．しかし式（A 1-1）より

$$\kappa E=E_0 \qquad \text{(A 1-3)}$$

である．ここで E_0 は誘電体がなかったときの電極間の電場で，再び Gauss の法則より，

$$\int_S \boldsymbol{E}_0\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}=E_0A \qquad \text{(A 1-4)}$$

で，式（A 1-3），（A 1-4）より

$$\kappa\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}=E_0A \qquad \text{(A 1-5)}$$

が得られる．また式（A 1-2），（A 1-3），（A 1-4）より

$$q-q'=\varepsilon_0EA=\frac{\varepsilon_0E_0A}{\kappa}=\frac{q}{\kappa}$$

$$\therefore\quad q'=q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) \qquad \text{(A 1-6)}$$

が求められ，$q'<q$ であることがわかる．

誘電体の表面に誘起された電荷 q' の単位面積に対する電荷密度は，q'/A で，この量の分子，分母に電極間の距離 d を掛けると，$q'd/Ad$ となる．しかし $q'd$ は電気双極モーメントの次元をもつから，この量は単位体積に対する誘電された電気双極モーメントと同等であることがわかる．そこで q'/A を

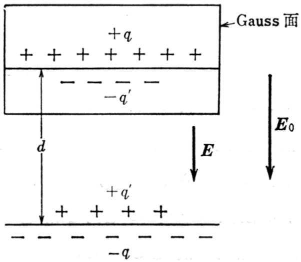


図 A 1-3

電気分極と定義し，記号 P で表わす．また式（A 1-6）より

$$\frac{q'}{A}=P=\frac{q}{A}-\frac{q}{\kappa A}$$

$$P=\varepsilon_0E_0-\varepsilon_0E$$

$$\therefore\quad \varepsilon_0E_0=\varepsilon_0E+P \tag{A 1-7}$$

の関係が得られる．上の量はすべてベクトル量であるから，

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{A 1-8}$$

と表わすべきで，$\boldsymbol{D}\equiv\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$ と定義すると，式（A 1-8）は

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{A 1-9}$$

と書ける．$\boldsymbol{D}$ は電気変位と呼ばれる．$\boldsymbol{D}||\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{D}|>\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|$ より $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{P}$ は同じ方向にある．そこで誘電体を含む空間での Gauss 法則は

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q \tag{A 1-10}$$

と書ける．ここで q は誘起された表面電荷を含まない電荷で，真電荷とも呼ばれる．

また，

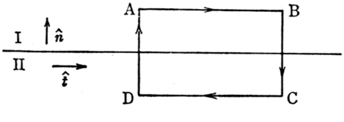
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0=\varepsilon_0\kappa\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\kappa(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P})$$

より

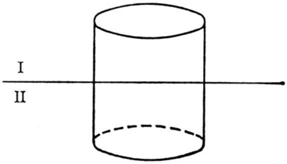
$$\boldsymbol{P}=(\kappa-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{A 1-11}$$

の関係が得られる．$\varepsilon\equiv\kappa\varepsilon_0$ と定義し，ε は誘電率と呼ばれる．しかし物質によっては式（A 1-11）は必ずしも成り立たないので注意しなければならない．

次に二つの物質から成り立つ境界面，たとえば前出のコンデンサーの電極と誘電体との境界面で，電場がどのように振る舞うだろう．図 A 1-4 (a) のよう



(a)



(b)

図 A 1-4

に物体 I と II があり，その境界線に垂直な方向を単位ベクトル $\hat{n}$，平行な方向を $\hat{t}$ で表わす．

次に ABCD という矩形の行路にそって

$$\oint_{\mathrm{ABCD}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

と線積分すれば，この積分の値はゼロである．この線積分を成分にわけると

$$\int_{\mathrm{AB}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\mathrm{BC}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\mathrm{CD}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\mathrm{DA}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

となる．そこで辺 AD と BC を非常に微少にとると，上式の第2，第4項の積分値はゼロとなり

$$\int_{\mathrm{AB}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\mathrm{CD}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

が得られる．また辺 AB と CD の長さが等しいから，上式より

$$E_{\mathrm{I}t}=E_{\mathrm{II}t} \qquad \text{(A 1-12)}$$

の関係が求められる．ここで $E_{\mathrm{I}t}$, $E_{\mathrm{II}t}$ は，それぞれ物質 I，II 内での境界面に平行な電場の成分である．次に図 A 1-4 (b) のように境界面をはさんで，底面積 A の円柱形の Gauss 面をとり，円柱の高さを非常に少さくすると，式 (A 1-10) より

$$\int_{\mathrm{I}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{II}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}+\int_{\text{側面}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sigma_f A$$

となる．ここで σ_f は真電荷の表面密度である．

次に物質 I，II の色々な組合せの場合を考えよう．まず I が導体，II が誘電体の場合は，$E_{\mathrm{I}}=0$ だから，$D_{\mathrm{I}}=0$ である．したがって式 (A 1-12) より $E_{\mathrm{II}t}=0$ となる．また真電荷が導体の表面にあるから

$$\int_{\mathrm{II}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sigma_f A$$

$$\therefore \quad D_{\mathrm{II}n}=\sigma_f \qquad \text{(A 1-13)}$$

となる．ここで $D_{\mathrm{II}n}$ は境界面に垂直な電気変位の成分である．しかし $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ より

$$E_{\mathrm{II}n}=\frac{\sigma_f}{\varepsilon}$$

となる．ここで $E_{\mathrm{II}n}$ はⅡの中での電場の境界面に対して垂直な成分である．誘電体の表面に誘電された分極電荷密度を σ_p とすれば，Gauss の法則より

$$E_{\mathrm{II}n}=\frac{\sigma_f+\sigma_p}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_f}{\varepsilon}$$

$$\therefore \quad \sigma_p=\sigma_f\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)$$

となる．そして $\varepsilon_0/\varepsilon\leqq 1$ で，$\sigma_f>0$ ならば $\sigma_p\leqq 0$ である．

Ⅰ もⅡ も誘電体で ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ の誘電率をもっている場合は，$\sigma_f=0$ より

$$D_{\mathrm{I}n}=D_{\mathrm{II}n} \tag{A 1-14}$$

または，

$$\varepsilon_{\mathrm{I}}E_{\mathrm{I}n}=\varepsilon_{\mathrm{II}}E_{\mathrm{II}n} \tag{A 1-15}$$

となる．そして

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{A\sigma_p}{\varepsilon_0}$$

である．

また

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

より，$\boldsymbol{D}$ は境界面で連続であるが，電気力線は式 (A 1-15)，式 (A 1-12) より，境界面で屈折する．

A 1-2　磁場と物質

外部磁場内におかれた物質の振舞いにより物質を色々な種類にわけることができる．多くの物質内では，それを構成する原子内の電子のスピンや，それらが原子核のまわりを回転することによってできる磁気モーメントは相打ち消し，物質全体としては磁気モーメントがない．しかしこのような物質が外部磁場内におかれると全体として磁気モーメントをもつようになる．この現象を磁化現象と呼ぶ．永久磁石は外部磁場がなくても磁化している物質である．磁化現象の程度の尺度として単位体積に対する磁気モーメントが使われ，これは磁化と呼ばれ，ベクトル $\boldsymbol{M}$ で

$$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{\mu}}{V} \tag{A 1-16}$$

と表わされる．ここで $\boldsymbol{\mu}$ は磁気モーメント，V は体積である．

第 3 章で出てきた Ampere の法則も，物質がある場合には補正されなければならない．自由空間で電流 i によってつくられる磁場は式 (3-7) より

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 i \tag{A 1-17}$$

である．この磁場により，物質は磁化されるため，物質内の磁場は，上式で与えられる磁場よりも一般に大きくなる．これは電流の増加と同等で，この増加した分の仮想の電流を i_m とすると†，式 (A 1-17) は

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0(i+i_m) \tag{A 1-18}$$

と書くことができる．そこで第 3 章で説明したソレノイドの問題を，今度はその内部を物質でつめて考えてみよう．式 (3-8) より，仮想電流を含めると

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=LB_x=\mu_0(Lni+Lni_m) \tag{A 1-19}$$

が求められる．ここで L はソレノイドの長さ，n は単位長に対する電線の巻き数である．また物質内に磁化現象によりできた磁気モーメント μ は，$\mu=ALni_m$ である．ここで A はソレノイドの断面積である．したがって磁化 M は

$$M=\frac{\mu}{V}=\frac{ALni_m}{AL}=ni_m \tag{A 1-20}$$

で与えられる．式 (A 1-20) を式 (A 1-19) に代入すれば

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 Lni+\mu_0 ML$$

$$=\mu_0 Lni+\mu_0\oint \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{A 1-21}$$

となる．式 (A 1-21) を整理すれば

$$\oint (\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M})\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 Lni$$

† i_m は電流ではないが，電流の次元をもつ量．

となる．ここで

$$\frac{\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M}}{\mu_0}\equiv\boldsymbol{H} \tag{A 1-22}$$

と定義すると，Ampere の法則は

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=i \tag{A 1-23}$$

となる．ここで i は真電流で，前節の真電荷と同等である．そして $\boldsymbol{H}$ は磁場の強さと呼ばれる．自由空間では $\boldsymbol{M}=0$ だから $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ である．

物質の磁化特性によっては $\boldsymbol{B}\propto\boldsymbol{H}$ の関係が満たされ，この比例定数を $\kappa_m\mu_0\equiv\mu$ とすると

$$\boldsymbol{B}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H} \tag{A 1-24}$$

となる．ここで μ は透磁率，κ_m は比透磁率と呼ばれる．式 (A 1-22) と (A 1-24) より

$$\boldsymbol{M}=(\kappa_m-1)\boldsymbol{H} \tag{A 1-25}$$

の関係が得られる．$|\kappa_m-1|\ll1$ で $\kappa_m-1>0$ の物質は常磁性物質と呼ばれ，$\kappa_m-1<0$ の場合は反磁性物質と呼ばれる．

式 (A 1-24) の関係が満たされない物質の一つは強磁性物質で，鉄はその一例である．この場合 $\boldsymbol{H}$ の増加に対して $\boldsymbol{M}$ は非直線的に増加し，ある $\boldsymbol{H}$ の値を越えると $\boldsymbol{M}$ は増加せず飽和してしまう．また M-H の関係は一般に非可逆的で，H を増加させ，M が飽和した後，H をゼロにもどしても M はゼロにならず，残留磁場が残る．M-H の関係を図で表わしたものを磁化曲線と呼び，その一例を図 A 1-5 に示す．この図から明らかなように，M の値は H

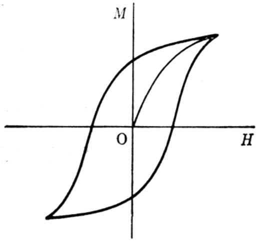


図 A 1-5

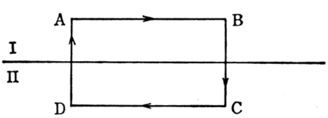


図 A 1-6

の値で一義的に定まるのではなく，それまでの H の値の変化の過程によって決まる．このような現象を磁気ヒステレシスと呼ぶ．

透磁率の違った二つの物質 I，II の境界面での H, B の境界条件は，誘電体の場合と同様に求められる．図 A 1-6 のように I，II の境界面をかこむ矩形路 ABCD をとると境界面には真電流が流れないから式（A 1-23）より

$$\oint_{\mathrm{ABCD}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

となり，また AD=BC≈0 ととれば，

$$H_{\mathrm{I}t}=H_{\mathrm{II}t} \qquad \text{(A 1-26)}$$

の条件が得られる．ここで，$H_{\mathrm{I}t}$, $H_{\mathrm{II}t}$ は，I，II での H の境界面に平行な成分である．

また $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ より

$$B_{\mathrm{I}n}=B_{\mathrm{II}n} \qquad \text{(A 1-27)}$$

が求められる．$B_{\mathrm{I}n}$, $B_{\mathrm{II}n}$ は I，II での B の境界面に垂直な成分である．

I，II の透磁率を μ_{I}, μ_{II} とすれば，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ が満たされる場合は，

$$\mu_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}n}=\mu_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}n} \qquad \text{(A 1-28)}$$

となる．

A 1-3　物質中での電磁波

誘電率 ε，透磁率 μ をもつ物質中で，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ の関係が満たされれば，Maxwell の方程式は，次のように書ける．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=\rho \qquad \text{(A 1-29 a)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(A 1-29 b)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \text{(A 1-29 c)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{(A 1-29 d)}$$

式（A 1-29 a）は

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q$$

より，式（A 1-29 d）は

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=i$$

と，第 4 章で説明した電束電流が，物質中では

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

で与えられることから求められる．$\rho=0$，$\boldsymbol{j}=0$ の場合，式（A 1-29 b）と（A 1-29 d）より $\boldsymbol{E}$ の波動式は，第 5 章で述べた手法で

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{A 1-30}$$

と求められる．この式より，物質中での電磁波の速度 v は

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{A 1-31}$$

で与えられることがわかる．一般に $\mu>\mu_0$，$\varepsilon>\varepsilon_0$ だから，物質中での電磁波の速度は真空中での速度 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ より遅い．

$$\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}\equiv n \tag{A 1-32}$$

はこの物質の屈折率と呼ばれる．

MKSA 系の単位のまとめ

電磁気学では色々な単位系があるが，この本で使った MKSA 系の単位をまとめてみよう．

物理的量	記　号	単　位	単位の略号
長さ	l, L 等	meter	m
質量	m 等	kilogram	kg
時間	t 等	second	s
力	F	newton	N
エネルギー	E 等	joule	J
力率（仕事率）	W 等	watt	W
電荷	q, Q	coulomb	C
電流	i, I	ampere	A

電位	ϕ, V	volt	V
電場	E	volt/meter	V/m
静電気容量	C	farad	F
誘電率	ε	farad/meter	F/m
磁場（磁束密度）	B	weber/meter^2≡tesla	Wb/m^2≡T
磁場の強さ	H	ampere/meter	A/m
インダクタンス	L	henry	H
透磁率	μ	henry/meter	H/m

付録 III

ベクトル演算式

この本ではベクトルの演算が多くでてきたので，ベクトルに関する，よく使われる演算式をまとめよう．

$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ は x, y, z 成分をもつベクトルを意味する．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=[(A_yB_z-A_zB_y),(A_zB_x-A_xB_z),(A_xB_y-A_yB_x)]$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$$
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$$
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ はベクトル演算子で，ベクトルと同等の振舞いをする．

$$\boldsymbol{\nabla} A=\left(\frac{\partial A}{\partial x},\frac{\partial A}{\partial y},\frac{\partial A}{\partial z}\right)\qquad \text{gradient } A \text{ と呼ぶ.}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\qquad \text{divergence } A \text{ と呼ぶ.}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

curl A または rotation A または rot A と呼ぶ.

参　考　書

1)　高橋秀俊著：電磁気学，裳華房

2)　平川浩正著：電磁気学，培風館

3)　平川浩正著：電気力学，培風館

4)　宮島龍興訳：ファインマン物理学 III，岩波書店

5)　戸田盛和訳：ファインマン物理学 IV，岩波書店

索　　引

あ　行

Einstein（アインシュタイン）　78
ampere（アンペア）　28
Ampere（アンペア）の法則　30

位相速度　61
インダクタンス　48

運動量　79

X　線　102
エネルギー　79
MKS 単位　7
MKSA 単位　7
LC 回路　51
electron volt（エレクトロンボルト）　19
円偏光　69

Oersted（オーステッド）　25

か　行

gauss（ガウス）　26
Gauss（ガウス）の定理　16
Gauss（ガウス）の法則　13
角運動量　67, 70
重ね合せの原理　9
可視光線　102
仮想光子　115
仮想状態　116
Galilei（ガリレイ）変換　75
curl（カール）　22
γ　線　102

起電力　44

quark（クオーク）　6
屈折率　131
gradient（グレイディエント）　19
Coulomb（クーロン）の法則　6
Coulomb（クーロン）力　7
群速度　71

光　子　107
光電効果　107
黒体輻射　108
コンデンサー　20
Compton（コンプトン）　112
Compton（コンプトン）散乱　112
Compton（コンプトン）波長　113

さ 行

Salam（サラム） 120
残留磁場 129

磁 化 127
磁化現象 127
磁気エネルギー 39, 50
磁気双極モーメント 38
磁気単極子 120
磁気ヒステレシス 130
磁気力線 33
時 空 58
自己インダクタンス 48
仕事関数 108
磁 束 33
磁 場 26
重力相互作用 1
常磁性物質 129
進行電磁波 60
信号の伝播 71
真電流 129

水素原子モデル 115
Stokes（ストークス）の定理 22
スピン 111

静磁場 25, 30
静電エネルギー 16
静電場 5
静電容量 20
制動輻射 114
絶縁体 121

双極子 9
相互インダクタンス 49
相互作用 114
速 度 79
ソレノイド 32

た 行

divergence（ダイバージェンス） 16

遅延点 95
遅延ポテンシャル 105
力 79
中間子 3
中性子 6
直線偏光 68

強い相互作用 1

定常電流 25, 29
Dirac（ディラク） 120
tesla（テスラ） 26
電 圧 19
電 位 16
電 荷 5
電荷密度 85
電気双極モーメント 10
電気変位 125
電気誘導 53
電気力線 11
電 子 6
電磁相互作用 1
電子対創生 114
電磁波 57
電磁波の運動量 66
電磁波のエネルギー 63
電磁波の偏光 67
電磁輻射 91
電磁誘導 43

電子-陽電子消滅　114
電　束　11
電束電流　54
電　場　8
電媒定数　123
電　流　28
電流密度　28, 85

導　体　121
導波管　71

な　行

ニュートリノ　119
Newton（ニュートン）　1

は　行

場　2
Heisenberg（ハイゼンベアク）　116
π中間子　118
パリティー　111
反磁性物質　129
反ニュートリノ　119

Biot-Savart（ビィオ-サバール）の法則　36
光生成反応　118
左巻き円偏光　69
比透磁率　129

Feynman diagram（ファインマンダイアグラム）　115
farad（ファラッド）　20
Faraday（ファラデー）の法則　43
Fitzgerald（フィッツジェラルド）　78
不確定性の原理　116
Planck（プランク）　108
Planck（プランク）の定数　108

分　散　71

ベクトルボゾン　119
ベクトルポテンシャル　33
ベータ崩壊　119
変　調　71
偏微分　16
henry（ヘンリー）　48

Bohr（ボーア）　115
Poynting（ポインティング）ベクトル　64
ポテンシャル　18
volt（ボルト）　18

ま　行

Michelson（マイケルソン）と Morley（モーリー）の実験　77
Maxwell（マクスウエル）の方程式　57, 75

右巻き円偏光　69
Millikan（ミリカン）　5

や　行

有極性分子　122
誘電体　123
誘電分極　123
誘電率　125
湯　川　3

陽　子　6
陽電子　114
弱い相互作用　1

ら　行

Rutherford（ラザフォード）散乱　3
Laplace（ラプラス）の方程式　35

量子化 107
量子電磁気学 108

Lenz（レンツ）の法則 **45**

rotation（ローテーション） **22**

Lorentz（ロレンツ）変換 **75**
Lorentz（ロレンツ）力 25

わ 行

Weinberg（ワインバーグ） 120

<著者略歴>

やまもと　すけやす
山本　祐靖

1955年　Yale大学卒業
1959年　Yale大学 Ph. D. 取得
　　　　Brookhaven国立研究所研究員
1965年　Massachusetts大学準教授
1970年　東京大学理学部助教授
　　　　現在にいたる

物理学の廻廊

電磁場・存在の一形態　　定価1600円

昭和54年10月29日　初　版

著　者　山　本　祐　靖

発行者　森　田　勝　久

発行所　産業図書株式会社
東京都千代田区外神田1-4-21
郵便番号　101-91
電　話　東京(253) 7821 (代)
振替口座　東京2-27724番

新日本印刷・昇栄社製本

「物理学の廻廊」刊行によせて

高校の物理を一通り学んだ者が更に深く物理を勉強しようとする場合に色々な選択がありうる．通俗的な解説書により大要を掴もうとするのも一方法であり，また正統的な教科書により勉強するのも一方法である．しかしながら前者にあっては，靴を隔てて痒きを掻くの感がしないでもない．すなわち肝心の本体の周りでどうどう巡りをしていていつまで経っても本当にわかったような気がしないという焦躁感にかられることがある．これは数理科学である物理学を数式抜きで理解しようとするところにその原因があるのではなかろうか．高校の物理以上のことを理解しようという意欲のある者にとっては，初等的な数式による記述はかえって理解を深めるための助けになるのではないだろうか．また後者の正統的な教科書で学ぶ方法は最善かもしれないが，通常この方法では，力学・電磁気学等の各分野をそれぞれ初めから勉強し直す．

しかし高校で一応勉強した者にとっては繰返しが多過ぎるのではないかと思われる．高校の物理と比較すると，本質的なことは変わらないのに用いられている数学的表現のみが高度になっているという場合が多い．

高校の数学では微積分を習うのに，高校の物理では不思議なことに微積分が使われていないので，一つの方程式から出て来る結果をばらばらに暗記しなければならないことがよくある．そもそも微積分は物理との関連において発達した数学の分野であることを考慮すると，この制限はいかにも不自然である．実際に高校以上の物理を学ぶのに必要な数学は，少数の例外を除いては高校で習う数学だけでほとんど十分なのである．

そこで本シリーズにおいては，高校で習った物理と数学の知識に基づいて色々な分野の関連を考え，あまり狭い枠組にとらわれずに物理学を概観することを試みた．また一冊一冊が小冊子であるので，すべての分野を詳細に，百科辞典式に記述することは初めから考えず，最重要綱目としてすべての分野に共通な概念に重点を置くという方針を採った．

このようなもくろみが成功するかどうかはわからないが，このような考え方が少しでも読者のお役に立てば幸いである．

西島和彦